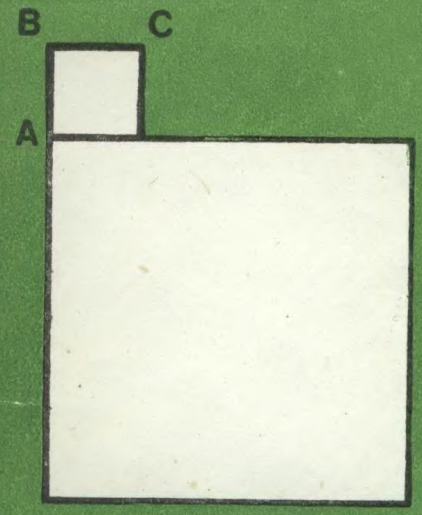
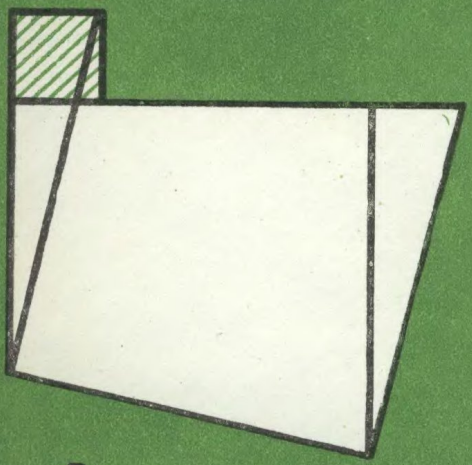
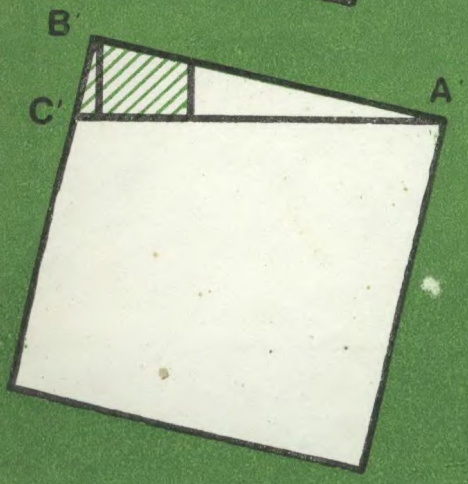
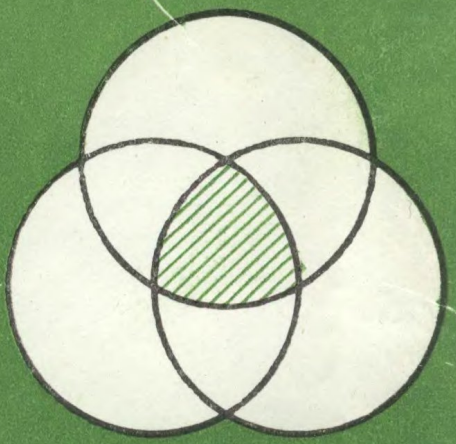
В.Н. БЕРЕЗИН, Л.Ю. БЕРЕЗИНА, И.Л. НИКОЛЬСКАЯ

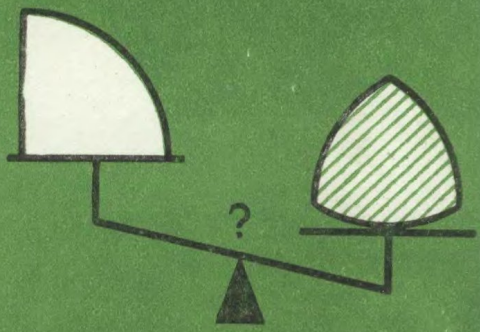
# СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ И ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

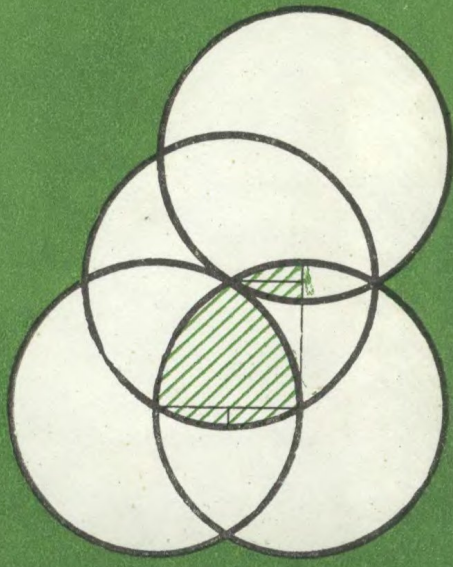

B
C
A

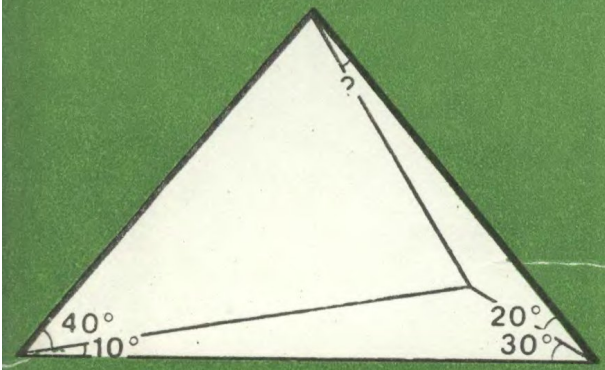


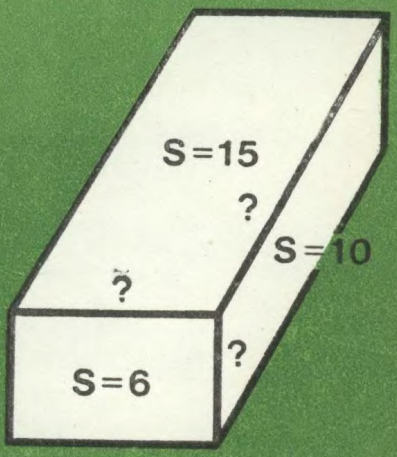

B'
C'
A'

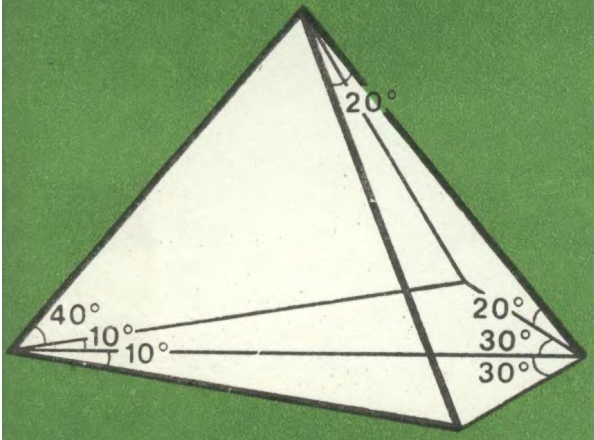


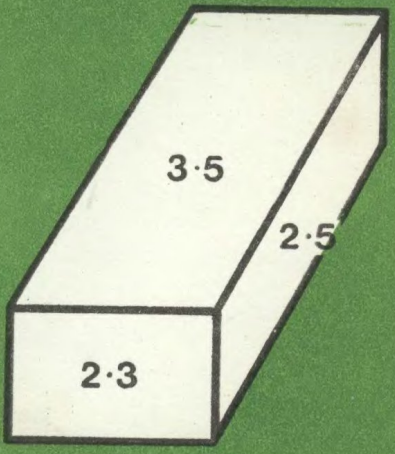

?

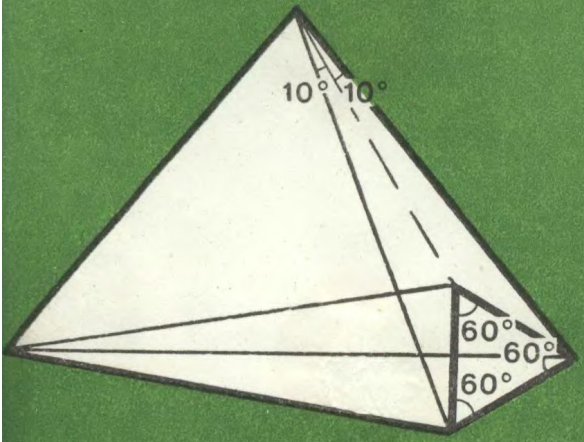


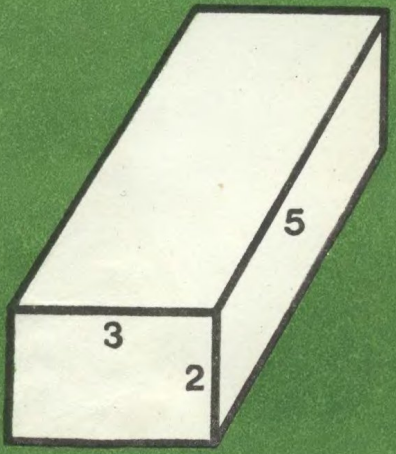

?
40°
10°
20°
30°


S=15
?
S=10
?
S=6
?


20°
40°
10°
10°
20°
30°
30°

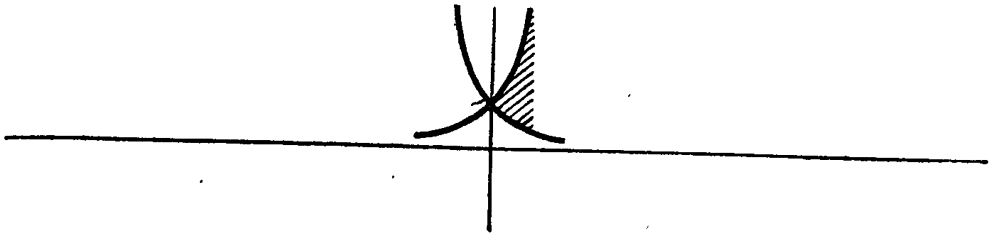

3·5
2·5
2·3


10°
10°
60°
60°
60°


5
3
2

Н.БЕРЕЗИН Л.Ю.БЕРЕЗИНА И.Л.НИКОЛЬСКАЯ

# СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ И ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ



КНИГА
ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1985

ББК 74.262
Б48

Рецензенты:
*Е. В. Ашкинузе*, учитель математики 613-й школы Москвы;
*В. Я. Зобнин*, учитель математики 447-й школы Москвы

**Березин В. Н.** и др.

Б48 Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике: Кн. для учителя / В. Н. Березин, Л. Ю. Березина, И. Л. Никольская. — М.: Просвещение, 1985. — 175 с., ил.

В книгу включены задачи различных разделов школьного курса математики. Их решение предполагает использование знаний основного и факультативного курсов математики в новых, нетривиальных ситуациях и разнообразных приложениях. Ко всем задачам даны решения.

Б $\frac{4306010000-807}{103(03)-85}$ 70—85

ББК 74.262
51

©Издательство «Просвещение» 1985

## СОДЕРЖАНИЕ


Предисловие . . . . . 3

**I. Алгебра и элементарные функции** . . . . . 5

7 класс . . . . . —
8 класс . . . . . 6
9 класс . . . . . 9
10 класс . . . . . 13

Решения . . . . . 16

7 класс . . . . . —
8 класс . . . . . 19
9 класс . . . . . 32
10 класс . . . . . 52

**II. Планиметрия** . . . . . 64

7 класс . . . . . —
8 класс . . . . . 67

Решения . . . . . 74

7 класс . . . . . —
8 класс . . . . . 86

**III. Стереометрия** . . . . . 110

9 класс . . . . . —
10 класс . . . . . 111

Решения . . . . . 116

9 класс . . . . . —
10 класс . . . . . 121

**IV. Разные задачи** . . . . . 141

Решения . . . . . 150

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Назначение данной книги — помочь учителю в достижении ряда важных целей, которые стоят перед ним в процессе факультативного и внеклассного обучения математике.

Одна из этих целей — дать учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике, возможность углубленного изучения основного курса путем рассмотрения задач, требующих нестандартного подхода при своем решении.

Другой важной целью является формирование мировоззрения учащихся, развитие их логического и творческого мышления.

Достижению этих целей служат специально подобранные задачи. Систематические упражнения в решении таких задач помогут обеспечить действенность приобретаемых учащимися знаний по математике.

В предлагаемое пособие входят задачи, решение которых не требует дополнительных к предусмотренным программой основного курса знаний, но эти знания используются в новых нетривиальных ситуациях.

При решении отдельных задач требуется углубленное знание некоторых теоретических вопросов, рассмотрение различных тонкостей, которые нецелесообразно рассматривать со всем составом учащихся на уроках. В сборник также включены задачи поискового характера, предусматривающие математическое моделирование реальных ситуаций и интерпретацию результатов.

Книга состоит из четырех разделов. В первом разделе «Алгебра и элементарные функции» даны задачи по курсу «Алгебра» для VI—VIII классов и курсу «Алгебра и начала анализа» для IX—X классов. Второй и третий разделы «Планиметрия» и «Стереометрия» содержат задачи по курсу геометрии. Четвертый раздел «Разные задачи» содержит задачи, направленные не столько на углубление знаний материала школьного курса, сколько на развитие сообразительности и логического мышления.

Задачи трех первых разделов распределены по классам, причем отнесение задачи к тому или иному классу определяется возможностью решить ее теми средствами, которыми к этому времени располагают учащиеся в результате изучения материала основного курса.

В каждом разделе к задачам даны решения. Многие задачи допускают несколько различных решений. Авторы выбирали такие решения, которые, по их мнению, наиболее доступны, естественны и помогают учащимся «набить руку» в практике решения разнообразных задач.

Некоторые из представленных в пособии задач заимствованы из школьных задачников разных лет изданий, сборников конкурсных и олимпиадных задач, журналов «Математика в школе», «Квант», «Юный техник».

Большинство задач, помещенных в сборнике, были рассмотрены с учащимися разных школ, а также с учащимися физико-математической школы МИИТа.

Авторы надеются, что предлагаемая книга поможет учителю в выработке у учащихся навыков умственного труда и в привитии интереса к решению математических задач.

# I. АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

## 7 класс

**1.** Пусть $a$, $b$, ..., $t$ — всевозможные простые делители натурального числа $N$, причем в разложение числа $N$ на простые множители $a$ входит $p$ раз, $b$ входит $q$ раз, ..., $t$ входит $r$ раз. Найти число всевозможных делителей $N$.

**2.** Показать, что $n^2 + n + 1$ при натуральном $n$ есть нечетное число, не являющееся квадратом никакого другого натурального числа.

**3.** Доказать, что дробь $\frac{ad+bc}{bd}$ является несократимой тогда и только тогда, когда $b$ и $d$ взаимно простые числа.

**4.** Доказать, что $\frac{b+c+d+\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots+k+l)} = \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \ldots + \frac{l}{(a+b+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)}$.

**5.** Дано, что $mn + pq$ делится без остатка на $m - p$. Доказать, что $mq + np$ тоже делится без остатка на $m - p$.

**6.** Доказать, что корень квадратный из натурального числа не может быть выражен несократимой дробью $\frac{m}{n}$ $(n \neq 1)$.

**7.** Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$.

**8.** Пусть $a$, $b$ и $c$ — целые числа. Доказать, что произведение $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел.

**9.** Два числовых тождества $\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3} = \frac{37+13}{37+24}$ и $\frac{50^3+48^3}{50^3+2^3} = \frac{50+48}{50+2}$ получены при подстановке числовых значений в буквенное тождество. Какое?

**10.** Какое из двух чисел больше: $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18}$ или 4?

**11.** Доказать, что число $\left[\frac{n}{2}\right] - 3n + (-1)^n - 1$, где $[x]$ означает целую часть числа $x$, при натуральных значениях $n$ делится без остатка на 5.

**12.** Какое надо добавить слагаемое, чтобы сумма $x + y + z + xy + xz + yz + xyz$ разлагалась на произведение трех множителей? Какие это множители?

**13.** Доказать, что для любых действительных значений $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ справедливо неравенство $(a - b)(a - c)(a - d)(a - e) +$

$+(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)+(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)+$
$+(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)\geqslant 0$.

**14.** Известно, что $d>c$, $a+b=c+d$, $a+d<b+c$. Можно ли по этим данным числа $a$, $b$, $c$ и $d$ записать в порядке возрастания?

**15.** Известно, что $x$ и $y$ — длины катетов прямоугольного треугольника, $z$ — длина его гипотенузы. Выяснить, что больше: а) $x^3+y^3$ или $z^3$; б) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ или $\frac{1}{z}$.

**16.** Какая из двух дробей $A=\frac{5678901234}{6789012345}$ и $B=\frac{5678901235}{6789012347}$ больше?

## 8 класс

**17.** Дано число $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$. Рациональное оно или иррациональное?

**18.** Показать, что найдутся такие иррациональные числа $A$ и $B$, что $A^B$ — число рациональное.

**19.** Доказать, что если числа $x$, $y$ и $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ рациональные, то и $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ тоже рациональное число.

**20.** Извлечь без помощи таблиц кубические корни из чисел:
а) $7+5\sqrt{2}$; б) $16+8\sqrt{5}$; в) $37+30\sqrt{3}$; г) $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$; д) $21\sqrt{6}-23\sqrt{5}$.

**21.** Что больше: $(n!)^2$ $(n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)$ или $n^n$ $(n>3)$?

**22.** Упростить выражение $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.

**23.** Освободиться от иррациональности в знаменателе $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

**24.** Найти сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i\,(i+1)}$.

**25.** Найти сумму $\frac{1}{n\,(n-1)}+\frac{1}{n\,(n+1)}+\ldots+\frac{1}{(n^2-n-1)\,(n^2-n)}$.

**26.** Найти сумму $\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}+\ldots+$
$+\frac{1}{(n^2+n-1)\,(n^2+n)}$.

**27.** Найти сумму $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+$
$+\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\,(i+1)\,(i+2)}$.

28. Найти сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)$.

29. Найти сумму $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$.

30. Найти сумму $(1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 2 + \ldots + (n-1)) + \ldots + (1+2) + 1$.

31. Найти сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$.

32. Найти сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

33. Подсчитать число различных квадратов на квадратном листе бумаги в клетку размером $n \times n$. Вершинами квадратов служат узлы бумаги в клетку, их стороны лежат на линейках клетчатой сетки.

34. Найти сумму $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$.

35. Найти сумму $(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) + \ldots + (1^2 + 2^2) + 1^2$.

36. Найти сумму следующих слагаемых: $(1) + (2+3) + (4+5+6) + (7+8+9+10) + \ldots$. Число слагаемых в каждой паре скобок совпадает с номером этой пары скобок.

37. Ряд нечетных натуральных чисел, начиная с единицы, разбивается на группы. В первой группе одно число (1), во второй — следующие два $(3+5)$, в третьей — следующие три $(7+9+11)$ и т. д. Доказать, что сумма чисел в $n$-й группе равна $n^3$ (з а д а ч а Н и к о м а х а — греческого математика, жившего в I—II вв.).

38. Найти сумму $n$ членов последовательности: 1, 11, 111, 1111, ...

39. Доказать, что натуральную степень натурального числа можно представить как сумму последовательных членов арифметической прогрессии, разность которой — четное натуральное число.

40. Найти сумму $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + nq^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} iq^{i-1}$.

41. Определить границы, в которых должно заключаться $m$, чтобы корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ находились между $-2$ и 4.

42. Для каких значений $a$ разность корней уравнения $ax^2 + x - 2 = 0$ равна 3?

43. Найти значение числа $a$, при котором уравнения $x^3 + ax + 1 = 0$ и $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ имеют общий корень.

44. При каком значении $a$ уравнение $(x - a^2)^2 = x$ имеет отрицательные корни.

45. Решить уравнение $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-b-c+a} = 0$.

46. Шины на передних колесах автомобиля стираются за $n_1$ кило-

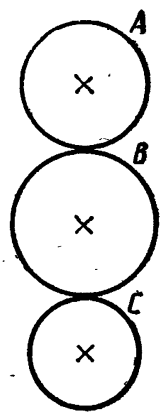


Рис. 1

метров пути, такие же шины на задних колесах автомобиля стираются за $n_2$ километров, причем $n_2 < n_1$. Как добиться того, чтобы шины на всех колесах стерлись одновременно? На сколько при этом удается удлинить путь автомобиля без смены шин?

**47.** Три колеса $A$, $B$ и $C$ расположены так, как показано на рисунке 1. Колесо $B$ ведущее. Оно передает вращение колесам $A$ и $C$ посредством трения без скольжения. Пусть длина окружности колеса $B$ равна 12 см, а длина окружности колеса $A$ на 1 см меньше, чем длина окружности колеса $C$. Колесо $C$ делает на 1 оборот меньше, чем колесо $A$, когда колесо $B$ совершает один оборот. Найти диаметры колес $A$ и $C$.

**48.** На круглом бильярдном столе радиуса $R$ в точке $P$ на расстоянии $d$ от центра стола $O$ находится бильярдный шар. Шар ударяют кием так, что он, последовательно оттолкнувшись от борта стола бильярда в некоторых точках $A$ и $B$, возвращается в точку $P$. Под каким углом $OPA$ ударили по шару кием?

**49.** Доказать, что из кирпича нельзя выпилить другой кирпич меньшего размера так, чтобы и объем второго кирпича, и полная его поверхность одновременно равнялись бы соответственно половине объема данного кирпича и половине его поверхности.

**50.** Доказать, что если сумма $n$ положительных чисел равна 1, то сумма чисел, им обратных, не менее $n^2$.

**51.** Доказать неравенство для положительных значений $a$ и $b$:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

**52.** Пусть $a + b \geqslant 1$. Доказать, что $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

**53.** Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

**54.** Доказать, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$6abc \leqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \leqslant 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

**55.** Показать, что

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

**56.** Доказать, что при $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

**57.** В городе $n$ зданий, сумма возрастов которых $T$. Отчего город больше помолодеет: от того ли, что снесут старое здание, или от того,

что построят новое? Продолжительностью строительства или процесса сноса здания пренебречь.

58. Доказать, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$, если $a$, $b$ и $c$ — стороны треугольника.

59. Доказать, что если $a$, $b$ и $c$ — стороны некоторого треугольника, то справедливо неравенство $a^4+b^4+c^4<2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$.

60. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Доказать, что если $AB+BD=CD+AC$, то $AB<AC$.

## 9 класс

61. Показать, что $|x|=\max(x;-x)$.

62. Доказать справедливость формулы

$$\max(x, y)=\frac{1}{2}\{|x-y|+x+y\}.$$

63. а) Вывести формулу (аналогичную приведенной в задаче 62) для выбора наибольшего из трех чисел $x$, $y$ и $z$.

б) Установить формулу для выбора наименьшего из трех чисел.

в) Установить формулу для выбора среднего по величине из трех чисел $x$, $y$ и $z$.

64. Задать такую функцию, которая принимала бы значение 1 для всех положительных значений $x$ и равнялась бы 0 для всех отрицательных значений $x$.

65. Функция $f(x)$ определена на интервале $]-a; a[$. Доказать, что: а) функция $\varphi_1(x)=f(x)+f(-x)$ четная; б) функция $\varphi_2(x)=f(x)-f(-x)$ нечетная.

66. Доказать, что система неравенств $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$ равносильна системе неравенств $f_1(x)+f_2(x)>0$ и $f_1(x)\cdot f_2(x)>0$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принимают только действительные значения.

67. Пусть $f(x)=\cos x+\cos \lambda x$ и $\lambda$ — иррациональное число. Доказать, что $f(x)$ не является периодической функцией.

68. Показать, что функция, удовлетворяющая уравнению $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, периодическая, и найти ее период.

69. Доказать, что если $a\neq 0$, $f(x)\neq 0$ для всех возможных значений $x$ и $f(x)=f(x-a)f(x+a)$, то функция $f(x)$ периодическая.

70. Построить графики функций: а) $y=|x|$; б) $|y|=x$.

71. Сколько целочисленных решений имеет уравнение:

а) $|x|+|y|<n$; б) $|x|+|y|\leqslant n$?

72. Построить график функции $y=\min(x, 1-x)$. Записать эту же функцию аналитически, с помощью знака модуля.

73. С потолка свисает веревка. По ней спускается равномерно со скоростью $v$ обезьянка. В момент $t$ она отпускает веревку и падает

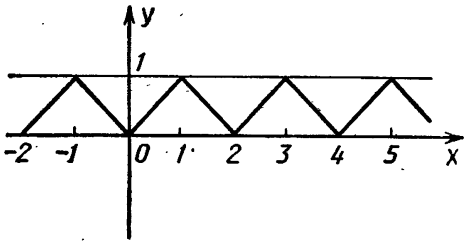



Рис. 2

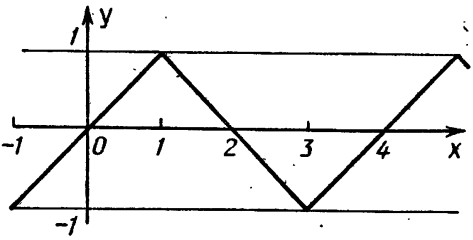



Рис. 3

с ускорением свободного падения вниз. Записать оба ее движения — равномерное и равномерно ускоренное — с помощью одного уравнения с использованием знака модуля.

**74.** Доказать, что все рациональные корни многочлена

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами — целые числа (теорема Гаусса).

**75.** Составить формулу, с помощью которой выражался бы $n$-й член последовательности вида: 0; 2; 2; 4; 4; 6; 6; ... .

**76.** Составить формулу, с помощью которой выражался бы $n$-й член последовательности вида: 2; 2; 2; 4; 6; 6; 6; 8; ... .

**77.** Представить аналитически периодическую функцию $y(x)$, график которой («пила») изображен на рисунке 2.

**78.** Представить аналитически периодическую функцию, график которой («пила») изображен на рисунке 3.

**79.** Возрастают или убывают с ростом $n$ члены последовательности $\frac{2^n+1}{2^n}$?

**80.** При каких значениях параметров $a$ и $b$ многочлен $12x^4 - 17x^2 + ax + b$ делится без остатка на $2x^2 + x - 1$?

В задачах 81—83 величины $x$ и $y$ заданы как функции от параметра $t$. Исключая $t$, получаем зависимость $y$ от $x$ или $x$ от $y$. Определить характер этой зависимости.

**81.** $x = at + b$, $y = ct + d$, где $a$, $b$, $c$ и $d$ постоянные, причем $ac \neq 0$.

**82.** $x = a\cos^2 t + b$, $y = c\sin^2 t + d$, где $a$, $b$, $c$ и $d$ постоянные, причем $ac \neq 0$.

**83.** $x = a\cos t + b$, $y = a\sin t + c$, $a \neq 0$.

**84.** Дано $x^y = y^x$. Ввести параметр $t$ так, чтобы получить систему $x = x(t)$, $y = y(t)$, равносильную данному равенству.

**85.** Известно, что $y = \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

а) При каком значении $k$ $y$ не зависит от $x$?

б) При каких значениях $k$ $y = 0$?

**86.** Выразить с помощью радикалов $\sin 18°$.

**87.** Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $ab + bc + ca \leqslant 0$.

**88.** Доказать, что если $a_i$ и $b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ положительны, то

дробь $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ принимает значение между наименьшей и наибольшей из дробей $\frac{a_i}{b_i}$.

**89.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа. Показать, что среднее арифметическое этих чисел не меньше их среднего геометрического, т. е. $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ (неравенство Коши).

**90.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. Примем $x_{n+1}$ равным $\bar{x}$. Определить, что больше: $\bar{x}$ или $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}}{n+1}$.

**91.** Доказать неравенство $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geqslant n$ при положительных $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

**92.** Из решения задачи 91 следует, что при положительных $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$ справедливо неравенство

$$2\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\right) \geqslant 2n. \qquad (1)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n}\right) \geqslant 2n \qquad (2)$$

$\left(\text{так как } \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1} \geqslant 2,\ \frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2} \geqslant 2 \text{ и т. д.}\right)$.

Можно ли установить для произвольных положительных $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, что больше: левая часть неравенства (1) или левая часть неравенства (2)?

**93.** Доказать, что если числа $x$, $y$ и $z$ положительные и $x+y+z=1$, то $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \geqslant 8$.

**94.** При каких положительных значениях переменных $a$, $b$ и $c$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}?$$

**95.** Показать, что если $a$, $b$ и $x$ положительны, то

$$f(x) = ax + bx^{-1} \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

**96.** Доказать, что $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$.

**97.** Доказать справедливость неравенства

$n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) \geqslant (a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$, где $a_1$,

$a_2, \ldots, a_n$ — любые числа (неравенство Коши—Буняковского).

**98.** Доказать, что произведение $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \times \frac{2499}{2500}$ меньше, чем 0,02.

**99.** Доказать, что при любом натуральном значении $n > 1$ сумма $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ больше, чем $\frac{1}{2}$, и меньше, чем 1.

**100.** Используя неравенство Коши, доказать для натуральных значений $n$ и $x > 0$, что $1 + \frac{x}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+x}$.

**101.** Доказать «двойное неравенство Коши»: $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a-b} > mb^{m-1}$, если $a > b > 0$.

**102.** Очевидно неравенство $6 < \sqrt[4]{6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} < 7$. Нельзя ли понизить верхнюю границу приведенной оценки корня?

**103.** Воспользовавшись двойным неравенством Коши, показать справедливость так называемых неравенств Проше: $2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$ и т. д.

**104.** Воспользовавшись неравенством $m^m > (m+1)^{m-1}$, доказать неравенство $n! > \sqrt{n^n}$.

**105.** Числа $x$ и $y$ положительны и $x + y = 1$. Какое наименьшее значение может иметь выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

**106.** Найти наибольшее значение:

а) $y = \cos x + \cos 2x$;

б) $y = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

**107.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ больше угла $B$, угол $B$ больше угла $C$. Кроме того, $\sin A + \sin B + \sin C = 1$. Доказать, что в таком треугольнике сумма углов $B$ и $C$ меньше 30°.

**108.** Доказать, что

$$|\cos x| + |\sin x| = \sqrt{1 + 2|\sin x \cos x|}.$$

**109.** Доказать без помощи таблиц справедливость равенства $\log_3 2{,}6 \cdot \log_5 5{,}76 = \log_5 2{,}4 \cdot \log_3 6{,}76$.

**110.** Упростить: $\frac{\lg(7 - 4\sqrt{3})}{\lg(2 - \sqrt{3})}$.

**111.** Доказать неравенство $\lg 7 < \frac{1 + \lg 5}{2}$.

**112.** Определить без помощи таблиц, какое из чисел больше: $\log_4 60$ или $\log_3 30$.

**113.** Определить без помощи таблиц, какое из двух чисел больше: $\log_3 7$ или $\log_7 27$.

**114.** Доказать, что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

**115.** Какое из двух чисел больше: $\sqrt[9]{9!}$ или $\sqrt[10]{10!}$?

**116.** Построить график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

**117.** Построить график функции $y = x - \frac{1}{x}$.

**118.** Построить график функции $y = x^3 - x$.

**119.** Построить график функции $y = x^2 - x^4$.

**120.** Построить график функции $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

**121.** Построить график функции $y = \cos x + \sin x$.

**122.** Построить график функции $y = \sin^5 x$.

**123.** Построить график функции $y = \sin^{\frac{1}{5}} x$.

**124.** Построить график функции $y = x \sin x$.

**125.** Построить график функции $y = x \cos x$.

**126.** Построить график функции $y = x - \sin x$.

**127.** Построить график функции $y = 2\,|\sin x|\cos x$.

**128.** Построить график функции $y = x \operatorname{arctg} x$.

**129.** Найти значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

**130.** Найти значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

**131.** При каких значениях $a$ уравнение $x = ae^x$ не имеет корней?

**132.** Сравнить значения функций $y_1 = \sin 2x$ и $y_2 = 2 \sin x$ при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

**133.** При каких значениях $\alpha$ график степенной функции $y = x^{2\alpha}$ имеет вид, показанный на рисунке 4?

**134.** При каких значениях $x$ производная функции $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + x$ равна 1?

**135.** Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, параллельной оси абсцисс.

**136.** В какой точке касательная к графику функции $y = e^x$ параллельна прямой $y = x - 1$?

## 10 класс

**137.** Известно правило, согласно которому можно проверить, является ли $x = 1$ корнем многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$: «если сумма коэффициентов многочлена при $x$ в четных степенях равна сумме его коэффициентов при нечетных степенях, взятых с обратным знаком, то $x = 1$ является корнем данного многочлена».

Например, $x = 1$ является корнем мно-

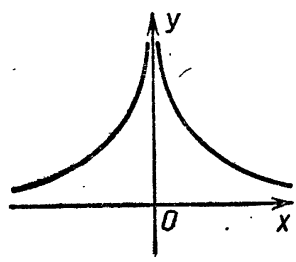


Рис. 4

гочлена $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$, потому что $1 + 2 + 1 = 3 + 1$. Сформулировать и доказать аналогичное правило для проверки того, является ли $x = -1$ корнем данного многочлена.

**138.** Частным от деления многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ на двучлен $x - b$ назовем многочлен $Q_{n-1}(x)$ такой, что $P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - b) + c$, где $c$ — некоторое число, называемое остатком от деления.

Показать, что многочлен $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ делится без остатка (т. е. остаток равен 0) на $(x - 1)^2$, и найти частное от этого деления.

**139.** Показать, что остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $x - a$ равен $P_n(a)$ (теорема Безу).

**140.** а) Может ли многочлен $y_1 = \lambda x^2 - (\lambda - 1)x + 1$ при каких-нибудь значениях $\lambda > 0$ принимать только положительные или только отрицательные значения для всех значений $x$?

б) Тот же вопрос для многочлена $y_2 = \lambda x^2 + (\lambda - 1)x - 1$.

**141.** Доказать, что если у каждого из двух данных многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ сумма коэффициентов равна 1, то и у произведения $P_n(x) \cdot Q_m(x)$ сумма коэффициентов равна 1.

**142.** Показать, что $2x - 3y$ представляет собой делитель одного из двух выражений

$$2x^3 - x^2y - xy^2 - 3y^3 \text{ и } 4x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3$$

и не является делителем другого. Найти общий множитель этих двух выражений, отличный от 1.

Используя симметрию алгебраических выражений, решить устно уравнения в упражнениях 143—150.

**143.** $x + \frac{1}{x} = 3\frac{1}{3}$.

**144.** $\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{a+c} + \frac{x-c}{a+b} = 3$.

**145.** $\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{a+c} + \frac{x-c}{a+b} = 0$. При каких значениях $a$, $b$ и $c$ решение существует?

**146.** $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1$.

**147.** $\frac{\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x-b^2}} = \frac{b}{a}$, найти хотя бы один корень.

**148.** $\frac{a+x}{a-x} = \frac{ab+1}{ab-1}$.

**149.** $x^2 = (x - 2)^2$.

**150.** $(a + x)(b + x) = (c + x)(d + x)$.

**151.** Решить уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$.

**152.** Решить уравнение $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$.

**153.** Решить уравнение $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

**154.** Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$.

**155.** Решить уравнение $\sqrt{1+x}+\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0$.

**156.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=a, \\ y+z+u=b, \\ z+u+x=c, \\ u+x+y=d. \end{cases}$

**157.** Решить систему уравнений $\begin{cases} xy+xz=a^2, \\ yx+yz=b^2, \\ zx+zy=c^2. \end{cases}$

**158.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+xy=a^2, \\ x+z+xz=b^2, \\ y+z+yz=c^2. \end{cases}$

**159.** Доказать, что при натуральном $N>2$ справедливо неравенство $N^{N+1}>(N+1)^N$.

**160.** Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют различную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия. Это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой. Как отличаются производительности второй и третьей линий?

**161.** При каких значениях $x$ существует угол $\alpha$, удовлетворяющий уравнению $\cos\alpha=\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$?

**162.** Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $a\cos x+b\sin y$.

**163.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{\sin^2 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

**164.** Решить уравнение $xf'(x)=2f(x)$, если $f(x)=x^3\ln x$.

**165.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=e^x,\ y=e^{-x} \text{ и } x=1.$$

**166.** Для функции $y=(\cos x+\sin x)^2$ найти первообразную, график которой проходит через точку (0; 1).

**167.** Решить уравнение $\int\limits_0^x \cos^2(xu)\,du=\frac{x}{2}+\frac{1}{4x}$.

**168.** Найти, при каком значении $a$ интеграл $\int\limits_0^x |t-a|\,dt$ принимает наименьшее значение.

**169.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 10, \\ y + \frac{1}{z} = 10, \\ z + \frac{1}{x} = 10. \end{cases}$

## РЕШЕНИЯ

### 7 класс

**1.** В качестве делителя $N$ число $a$ может быть выбрано в степенях 1, 2,..., $p$, число $b$ — в степенях 1, 2, ..., $q$ и т. д., число $t$ — в степенях 1, 2, ..., $r$. Тогда любое число вида $a^{p'} \cdot b^{q'} \cdot \ldots \cdot t^{r'}$, где $p'$, $q'$, ..., $r'$ — натуральные числа или нуль, причем $p' \leqslant p$, $q' \leqslant q$, ..., $r' \leqslant r$, является делителем числа $N$. Замечаем, что в делитель числа $N$ $a$ может входить в степенях 0, 1, ..., $p$, т. е. для $a$ имеется $p + 1$ возможность. Аналогично для $b$ имеется $q + 1$ возможность и т. д. Всего же делителей числа $N$ оказывается $(p + 1) \times \times (q + 1) \ldots (r + 1)$.

**2.** Число $n^2 + n + 1$ может быть представлено в виде $n(n + 1) + 1$, где $n$ — натуральное число. Произведение $n(n + 1)$ — четное число, следовательно, $n(n + 1) + 1$ — нечетное.

Ближайшие к числу $n^2 + n + 1$ квадраты натуральных чисел — это $n^2$ и $(n + 1)^2$. Действительно, $n^2 + n + 1 > n^2$ и $n^2 + n + 1 < (n^2 + n + 1) + n = (n + 1)^2$. Так как $n^2$ и $(n + 1)^2$ — квадраты последовательных натуральных чисел, а число $n^2 + n + 1$ находится между названными квадратами, то само оно квадратом натурального числа быть не может.

**3.** Необходимость очевидна. В самом деле, если предположить, что $b$ и $d$ имеют общий делитель, то этот же делитель имеют числа $bc$ и $ad$ и, следовательно, сумма $ad + bc$. Тогда дробь $\frac{ad + bc}{bd}$ сократима, что противоречит условию.

Покажем, что если $b$ и $d$ не имеют общего делителя, отличного от единицы, то дробь $\frac{ad + bc}{bd}$ несократимая. Предположим противное. Тогда сумма $ad + bc$ имеет общий множитель либо с $b$, либо с $d$. Примем для определенности, что $ad + bc$ имеет общий натуральный делитель с $b$. Но это невозможно, поскольку число $bc$ кратно $b$, а число $ad$ — взаимно простое с $b$ (сомножитель $a$ — числитель несократимой дроби $\frac{a}{b}$, $d$ и $b$ не имеют общих множителей по условию). Точно так же показываем, что сумма $ad + bc$ не имеет общего натурального делителя с $d$. Таким образом, достаточность доказана.

**4.** $\frac{b}{a(a+b)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$, $\frac{c}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b+c}$, ...,

$$\frac{l}{(a+b+\ldots k)(a+b+\ldots+k+l)} = \frac{1}{a+b+\ldots+k} - \frac{1}{a+b+\ldots+k+l}.$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \ldots + \frac{l}{(a+b+\ldots+k)(a+b+\ldots+k+l)} =$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b+\ldots+k+l} = \frac{b+c+d+\ldots+k+l}{a(a+b+\ldots+k+l)}.$$

**5.** $mn = mn - np + np = (m-p)n + np$,
$pq = pq - mq + mq = q(p-m) + mq$.

Отсюда $mn + pq = (m-p)n + q(p-m) + (np + mq)$.

Первые два слагаемых делятся без остатка на $m - p$, значит, и $np + mq$ делится на $m - p$.

**6.** Предположим, что $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Возводя обе части равенства в квадрат, получаем: $k = \frac{m^2}{n^2} = \frac{m_1}{n_1}$, где $m_1$ и $n_1$ — натуральные числа ($n_1 \neq 1$), не имеющие общих множителей, т. е. приходим к противоречию.

**7.** Умножаем и числитель, и знаменатель на 2. Получаем:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)} =$$
$$= \frac{1+2\sqrt{3}+3}{2(\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1))} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{2}-1)} =$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1).$$

**8.** Перемножив, получим: $1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2c^2$. Найдем хотя бы один способ представления полученного выражения в виде суммы двух квадратов. Разобьем его на два симметричных относительно $a$, $b$ и $c$ слагаемых:

$$(1 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2). \qquad (*)$$

Слагаемые группируем так. Первые скобки содержат квадраты четырех чисел: 1 (или —1), $ab$ (или $-ab$), $ac$ (или $-ac$), $bc$ (или $-bc$). Вторые скобки содержат квадраты чисел $a$ (или $-a$), $b$ (или $-b$) и т. д. Составим шесть попарных произведений первых степеней так, чтобы они дополняли выражения, стоящие в первых скобках, до полного квадрата. Такими произведениями (без учета знака) будут: $2ab$, $2ac$, $2bc$, $2a^2bc$, $2ab^2c$, $2abc^2$. Точно так же поступим по отношению ко вторым скобкам. Только в одну пару скобок удвоенное произведение будем брать с одним знаком, в другую — с противоположным. Получаем:

$$1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2c^2 =$$
$$= (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 1 - 2ab - 2bc - 2ac + 2a^2bc + 2ab^2c +$$

Научная библиотека
им. Горького
МГУ

$+ 2abc^2) + (a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2) = (ab + bc + ac - 1)^2 + (a + b + c - abc)^2$.
Числа $ab + bc + ac - 1$ и $a + b + c - abc$ целые.

Можно указать и другие представления данного выражения в виде суммы двух целых квадратов, например: $(-ab - bc - ac + 1)^2 + (a + b + c - abc)^2$.

**9.** Замечаем:

$$\frac{37^3 + 13^3}{37^3 + 24^3} = \frac{37 + 13}{37 + 24} = \frac{37 + 13}{37 + (37 - 13)};$$

$$\frac{50^3 + 48^3}{50^3 + 2^3} = \frac{50 + 48}{50 + 2} = \frac{50 + 48}{50 + (50 - 48)}.$$

Докажем справедливость следующего тождества:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a - b)^3} = \frac{a + b}{a + (a - b)}.$$

Действительно,

$$\frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{(a + a - b)(a^2 - a(a - b) + (a - b)^2)} =$$

$$= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{(2a - b)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{a + b}{2a - b} = \frac{a + b}{a + (a - b)}.$$

**10.** $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{2}(2 + \sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{9}) >$

$$> 2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{8} > 2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = 4.$$

**11.** Натуральное число $n$ является четным или нечетным. Если оно четное, то $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$ и данное выражение можно записать так: $\frac{n}{2} - 3n + 1 - 1 = -\frac{5n}{2}$. Полученное отрицательное целое число делится без остатка на 5. Если же $n$ — число нечетное, то $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$ и тогда получим: $\frac{n-1}{2} - 3n - 1 - 1 = -\frac{5(n+1)}{2}$. И на этот раз получили целое число, делящееся без остатка на 5. Итак, данное выражение при всех натуральных значениях $n$ делится без остатка на 5.

**12.** Добавить следовало число 1: $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz$.

**13.** Предположим для определенности, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$. В противном случае переименуем величины $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ так, чтобы указанная цепочка неравенств сохранялась. При таком переименовании запись левой части данного в условии задачи неравенства не изменится. Теперь замечаем, что первое, третье и пятое слагаемые в данном неравенстве неотрицательны. Второе и четвертое слагаемые неположительны. Покажем, что сумма первого и второго слагаемых неотрицательна:

$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)=$
$=(a-b)[(a-c)(a-d)(a-e)-(b-c)(b-d)(b-e)]$.

Так как, $a-c\geqslant b-c\geqslant 0$, $a-d\geqslant b-d\geqslant 0$, $a-e\geqslant$ $\geqslant b-e\geqslant 0$, то справедливы неравенства $(a-c)(a-d)\times$ $\times(a-e)\geqslant(b-c)(b-d)(b-e)$ и $(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+$ $+(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)\geqslant 0$.

Теперь покажем, что сумма четвертого и пятого слагаемых неотрицательна:

$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)=$$
$$=(d-e)((d-a)(d-b)(d-c)+(a-e)(b-e)(c-e))\geqslant$$
$$\geqslant(d-e)(c-e)((a-e)(b-e)-(a-d)(b-d))$$

(поскольку $c-e\geqslant c-d$).

Но $a-e\geqslant a-d$. Поэтому

$$(a-e)(b-e)-(a-d)(b-d)\geqslant(a-d)(b-e)-(a-d)(b-d)=$$
$$=(a-d)(b-e-b+d)=(a-d)(d-e)\geqslant 0.$$

Следовательно, сумма четвертого и пятого слагаемых действительно неотрицательна.

**14.** Из неравенства $a+d<b+c$ следует, что $d-b<c-a$. Но $c-a=b-d$, поэтому $d-b<b-d$, $d<b$. Наконец, из равенства $c-a=b-d$ и неравенства $b>d$ получаем: $c>a$. Итак, $b>d>c>a$.

**15.** Раз треугольник прямоугольный, то $x^2+y^2=z^2$. Примем для определенности, что $x\leqslant y\leqslant z$.

а) Умножим обе части уравнения $x^2+y^2=z^2$ на $y$, получим: $x^2y+y^3=z^2y$. Имеем: $x^2y+y^3\geqslant x^3+y^3$ (заменяем множитель $y$ в произведении $x^2y$ на $x$) и $z^2y<z^3$. Тогда $x^3+y^3<z^3$.

б) В данном случае нет необходимости использовать равенство $x^2+y^2=z^2$. Поскольку $z$ — длина гипотенузы, $z\geqslant x$. Следовательно, $\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{x}$. Тем более $\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

**16.** Если пойти в решении этой задачи традиционным путем, то придется перемножать слишком большие числа, а затем их сравнивать. Мы же воспользуемся следующим приемом. Обозначим числитель дроби $A$ через $x$, знаменатель — через $y$. Тогда $A=\frac{x}{y}$, $B=\frac{x+1}{y+2}$, причем $x<y<2x$.

Определим знак разности:

$A-B=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}=\frac{2x-y}{y(y+2)}>0$. Следовательно, $A>B$.

## 8 класс

**17.** $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$. Поэтому данное число равно $2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$. Следовательно, оно рациональное.

**18.** Рассмотрим, например, число $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$. Вопрос о том, рацио-

нальное оно или иррациональное, сложен и требует исследования специальными средствами. Но для того чтобы ответить на вопрос задачи, к таким исследованиям прибегать совсем не нужно.

Возможны два случая: 1) пусть $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ — рациональное число; тогда нам удалось найти такое число, которое удовлетворяет условию задачи; 2) пусть $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ — иррациональное число. Примем его за $A$, а за $B$ примем число $\sqrt{6}$. Тогда $((\sqrt{2})^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = 8$ — рациональное число.

**19.** Если $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ — число рациональное, то $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ — число рациональное. Но $x-y$ — рациональное число. Следовательно, $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ — рациональное число.

**20.** а) Для того чтобы извлечь корень кубический из суммы, надо представить ее в виде $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$. Замечаем, что

$$7 + 5\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} + 3\cdot 2 + 2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^3.$$

б) Аналогично получаем: $16 + 8\sqrt{5} = (1+\sqrt{5})^3$.

в) Одно из слагаемых двучлена, который получается после извлечения кубического корня, имеет вид: $a\sqrt{3}$. Второе слагаемое пусть равно $b$. Тогда

$$(a\sqrt{3}+b)^3 = 3a^3\sqrt{3} + 9a^2b + 3b^2a\sqrt{3} + b^3.$$

Следовательно, $3a^3\sqrt{3} + 3b^2a\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$, $a^3 + b^2a = 10$. Подбором убеждаемся, что среди натуральных чисел решением этого уравнения являются: $a=1$, $b=3$; $a=2$, $b=1$. Кроме того, должно выполняться равенство $9a^2b + b^3 = 37$. При $a=1$ и $b=3$ это равенство неверно, а при $a=2$ и $b=1$ — верно. Следовательно, $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}+1$.

г) Имеем аналогично предыдущему:

$$(a\sqrt{3}+b\sqrt{2})^3 = 3a^3\sqrt{3} + 2b^3\sqrt{2} + 9a^2b\sqrt{2} + 6ab^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}.$$

Следовательно, $9 = 3a^3 + 6ab^2$, $3 = a^3 + 2ab^2$. Целочисленное решение получаем только в случае, когда $a=1$, $b=1$ и $a=1$, $b=-1$. Кроме того, должно выполняться равенство $2b^3 + 9a^2b = -11$. Ему удовлетворяет только одна пара значений: $a=1$ и $b=-1$. Итак, $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

д) $21\sqrt{6} - 23\sqrt{5} = (a\sqrt{6}+b\sqrt{5})^3 = 6a^3\sqrt{6} + 18a^2b\sqrt{5} + 15ab^2\sqrt{6} + 5b^3\sqrt{5}$; $21 = 6a^3 + 15ab^2$, $7 = 2a^3 + 5ab^2$.

Последнему равенству удовлетворяют $a=1$, $b=1$ и $a=1$, $b=-1$.

Кроме того, должно выполняться равенство $-23 = 18a^2b + 5b^3$. Оно справедливо только при $a=1$ и $b=-1$. Следовательно,

$$\sqrt[3]{21\sqrt{6}-23\sqrt{5}} = \sqrt{6}-\sqrt{5}.$$

21. Представим оба числа как произведение $n$ сомножителей:

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot (n-1)) \times \times (1 \cdot n)$$

и

$$n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ раз}}.$$

Сравним $k$-й сомножитель в первом и втором произведениях ($1 \leqslant k \leqslant n$). В первом произведении он равен $k(n-k+1)$. Рассмотрим разность $n - kn + k^2 - k = n(1-k) + k(k-1) = (k-1)(k-n) \leqslant 0$. Получаем, что каждый сомножитель первого числа не меньше соответствующего сомножителя второго числа, причем некоторые из сомножителей первого числа строго больше соответствующих сомножителей второго. Следовательно, первое число больше.

22. Лучше всего воспользоваться тождеством

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

которое легко проверить. В данном случае получаем:

$$(y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3 = (y-z+z-x+x-y) \cdot A + 3(x-y)(z-x)(y-z),$$

где $A$ — некоторый множитель, представляющий сумму квадратов $n$ попарных произведений, взятых с соответствующими знаками. Однако вычислять $A$ нет необходимости, поскольку первый множитель, содержащийся в скобках, равен нулю. Следовательно, данное выражение равно $3(x-y)(z-x)(y-z)$.

23. Можно вновь применить тождество, которое использовалось при решении задачи 22. Действительно, $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}) \times (\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}) = a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$. Поэтому, помножив и числитель, и знаменатель данной дроби на $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}$, получаем в знаменателе $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$. Умножаем теперь и числитель, и знаменатель полученной дроби на $(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, получаем в знаменателе $(a+b+c)^3-27abc$ — выражение рациональное, что и требовалось.

24. Рассмотрим $k$-е слагаемое этой суммы. Оно равно $\frac{1}{k(k+1)}$. Попытаемся, используя *метод неопределенных коэффициентов*, представить это слагаемое в виде суммы простейших дробей $\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$, где $a$ и $b$ — некоторые постоянные, не зависящие от номера $k$. Имеем:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{k(a+b)+a}{k(k+1)},$$

откуда получаем, что $a$ должно быть равно 1, а коэффициент при $k$, равный $a+b$, — нулю, т. е. $b=-1$. Следовательно,

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Используя полученную формулу, перепишем данную сумму в виде

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

**25.** Искомую сумму можно записать в виде

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ \dots\ +\frac{1}{n^2-n-1}-\frac{1}{n^2-n}=$$
$$=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}.$$

**26.** Попробуем найти сумму, используя ответ к предыдущей задаче. Слагаемое $\frac{1}{n(n+1)}$ получается из $\frac{1}{n(n-1)}$ заменой $n$ на $n+1$. Если теперь заменить $n$ на $n+1$ в $n^2-n-1$, то получим: $(n+1)^2-(n+1)-1=n^2+n-1$. В результате того же преобразования $n^2-n$ заменяется на $n^2+n$. Поэтому $\frac{1}{(n^2+n-1)(n^2+n)}$ также получается из $\frac{1}{(n^2-n-1)(n^2-1)}$ заменой $n$ на $n+1$. Искомая сумма равна $\frac{1}{n+1}$.

**27.** На этот раз вновь воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, только представлять $k$-е слагаемое станем не в виде разности простейших дробей, а в виде разности специального вида (такого, чтобы, как и в предыдущем случае, сократились промежуточные слагаемые):

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k(k+1)}-\frac{b}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{1}{k+1}\left(\frac{a}{k}-\frac{b}{k+2}\right)=\frac{(a-b)k+2a}{k(k+1)(k+2)}.$$

Получаем: $a=b$, $a=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$.
В результате данная сумма приобретает вид:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\ \dots\ +\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

**28.** Попытаемся представить $k$-е слагаемое данной суммы в виде $a(k+1)(k+2)(k+3)-bk(k+1)(k+2)$. Если это удастся, то

можно надеяться, что для суммы мы получим компактное выражение (если $a = b$). Вынося за скобку $(k+1)(k+2)$, получаем: $(k+1)\times$ $\times(k+2)\cdot((a-b)k+3a)$. Оказывается, что с помощью записанного выражения хорошо представляется не $k$-е, а $(k+1)$-е слагаемое. Если принять $(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2)\cdot((a-b)k+3a)$, то $a=b$, $a=\frac{1}{3}$.

Формула справедлива, начиная со второго слагаемого: $2\cdot 3=\frac{1}{3}\cdot(2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3)$. Поэтому получаем:

$$1\cdot 2+\frac{1}{3}(2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3+3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 3\cdot 4+$$
$$+4\cdot 5\cdot 6-3\cdot 4\cdot 6+\ldots+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1))=$$
$$=\frac{1}{3}(1\cdot 2\cdot 3+n(n+1)(n+2)-1\cdot 2\cdot 3)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

**29.** Аналогично предыдущему, представляем $(k+1)$-е слагаемое в виде

$$a(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-bk(k+1)(k+2)(k+3),$$

откуда получаем, что $a=b=\frac{1}{4}$, и данная сумма равна

$$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

**30.** Свернув каждое из слагаемых с помощью формулы суммы арифметической прогрессии, получаем:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\ldots+\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}[1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)]=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

**31.** Воспользуемся ранее полученной формулой (см. решение задачи 28):

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Преобразуем левую часть суммы $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ так, чтобы в нее входила левая часть последнего равенства:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+$$
$$+\ldots+n(n+1)-(1+2+3+\ldots+n)=$$
$$=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**32.** Воспользуемся результатом, полученным в ходе решения задачи 29: $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=$ $=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Преобразуем данную сумму:

$$1^2(1+1)+2^2(2+1)+3^2(3+1)+\ldots+n^2(n+1)-$$
$$-(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+3^2\cdot 4+$$
$$+\ldots+n^2(n+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1\cdot 2(1+2)+2\cdot 3(2+2)+$$
$$+3\cdot 4(3+2)+\ldots+n(n+1)(n+1+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$$
$$-2(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1))=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+$$
$$+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$$
$$-\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$$
$$-\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**33.** Чтобы получить ответ на вопрос задачи, надо упорядочить подсчет квадратов, т. е. указать способ подсчета всех квадратов, при котором после каждого этапа часть квадратов оказывается сосчитанной, а затем суммировать все числа, полученные на отдельных этапах.

Возьмем сначала один самый маленький квадрат (размером $1\times 1$), расположенный в левом верхнем углу (на рис. 5 он зачернен). Будем его последовательно перемещать вдоль верхней строки вправо на каждую из клеток и считать перемещения. В ходе такого перемещения окажутся сосчитанными $n$ самых маленьких квадратов. Перейдя ко второй сверху строке и проведя аналогичные рассуждения, получим во второй строке $n$ квадратов и т. д. Всего квадратов размером $1\times 1$ получится $n^2$.

Рассмотрим теперь квадрат размером $2\times 2$, расположенный в левом верхнем углу (на рис. 5 он заштрихован). Станем его последовательно перемещать по горизонтали вправо на соседнюю позицию. Всего таких перемещений $n-1$. Выполнив аналогичные перемещения во второй строке, получим еще $n-1$ перемещение. Продолжая рассуждения дальше, получаем $(n-1)^2$ квадратов размером $2\times 2$. Точно так же убеждаемся, что квадратов размером $3\times 3$ будет $(n-2)^2$, размером $4\times 4$ — $(n-3)^2$ и т. д., размером $n\times n$ — $1^2$. Всего квадратов окажется столько, сколько позиций при их перемещениях, а именно:

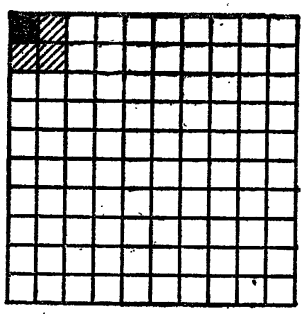



Рис. 5

$$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+2^2+1^2=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**34.** Воспользуемся следующими очевидными равенствами:

$$1=n-(n-1),$$
$$2=n-(n-2),$$
$$3=n-(n-3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n-1=n-1,$$
$$n=n-0.$$

Тогда данную сумму $S$ можно записать так:

$$(n-(n-1))\cdot n+(n-(n-2))\cdot(n-1)+(n-(n-3))(n-2)+$$
$$+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1.$$

Выполним умножение и перегруппируем слагаемые. Получим:

$$n^2+n(n-1)+n(n-2)+\ldots+n\cdot 2+n\cdot 1-$$
$$-((n-1)\cdot n+(n-2)\cdot(n-1)+\ldots+2\cdot 1)=$$
$$=\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

35. $n\cdot 1^2+(n-1)\cdot 2^2+(n-2)\cdot 3^2+\ldots+(n-(n-1))n^2=$
$=n(1^2+2^2+\ldots+n^2)-(1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2)=$
$=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}-((2-1)\cdot 2^2+(3-1)\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2)=$
$=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}-(1^3+2^3+\ldots+n^3)+(1^2+2^2+\ldots+n^2)=$
$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

36. Прежде чем искать сумму, выясним из условия, что представляет $n$-я (последняя) группа слагаемых. Из условия задачи следует, что перед этой группой расположены $1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$ первых натуральных чисел, а в самой этой группе $n$ слагаемых. Потому искомую сумму можно записать так:

$$S=(1)+(2+3)+(4+5+6)+(7+8+9+10)+\ldots+$$
$$+\left(\left(\frac{(n-1)n}{2}+1\right)+\left(\frac{(n-1)n}{2}+2\right)+\ldots+\left(\frac{(n-1)n}{2}+n\right)\right).$$

Далее преобразуем $n$-ю группу слагаемых к виду

$$\frac{1}{2}(n-1)n^2+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n^3+n}{2}.$$

Выполняя суммирование, получаем:

$$S=\frac{1}{2}(1^3+2^3+\ldots+n^3+(1+2+\ldots+n))=$$
$$=\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2).$$

37. $n$-я по порядку группа слагаемых, заключенная в скобки, имеет перед собой $1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$ нечетных чисел. Следовательно, она начинается с $\left(\frac{(n-1)n}{2}+1\right)$-го

нечетного натурального числа, которое равно $2\left(\frac{(n-1)n}{2}+1\right)-1=$ $=n(n-1)+1$. Обозначим сумму слагаемых группы через $S_n$. Тогда $S_n=n(n-1)+1+n(n-1)+3+\ldots+n(n-1)+2n-1=(n(n-1))n+n^2=n^3$.

**38.** Легко заметить, что

$$9a_n=9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots99}_{n}=$$

$$=10+100+1000+\ldots+\underbrace{100\ldots00}_{n}-n=$$

$$=10(1+10+\ldots+10^{n-1})-n=$$

$$=10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}-n=\frac{10^{n+1}}{9}-\frac{10}{9}-n$$

и $a_n=\frac{1}{81}\cdot10^{n+1}-\frac{10}{81}-\frac{n}{9}$.

Вследствие этого получаем:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{1}{81}(10^2+10^3+\ldots+10^{n+1})-\frac{10}{81}n-$$

$$-\frac{1}{9}(1+2+\ldots+n)=$$

$$=\frac{10^2}{81}(1+10+\ldots+10^{n-1})-\frac{10}{81}n-\frac{1}{18}n(n+1)=$$

$$=\frac{100}{81}\cdot\frac{10^n-1}{9}-\frac{n}{162}(20+9n+9)=$$

$$=\frac{1}{81}\left(\frac{100}{9}(10^n-1)-\frac{n}{2}(9n+29)\right).$$

**39.** Пусть рассматриваемая степень $n^\alpha$. Прогрессия должна иметь вид:

$$a_1,\ a_1+2r,\ a_1+4r,\ \ldots,\ a_1+2r(n-1).$$

Сумма $n$ ее членов равна $\frac{(2a_1+2r(n-1))n}{2}=n(a_1+r(n-1))$.

Следовательно, должно выполняться равенство $a_1+r(n-1)=n^{\alpha-1}$, откуда $a_1=n^{\alpha-1}-r(n-1)$. Запишем $n$-й член прогрессии:

$$a_n=a_1+2r(n-1)=n^{\alpha-1}-r(n-1)+2r(n-1)=$$
$$=n^{\alpha-1}+r(n-1).$$

Таким образом, получаем, что

$$n^\alpha=((n^{\alpha-1}-rn)+r)+((n^{\alpha-1}-rn)+3r)+((n^{\alpha-1}-rn)+5r)+$$
$$+\ldots+((n^{\alpha-1}-rn)+(2n-1)r).$$

Например, если $n=5$, $\alpha=3$, $r=2$, то

$5^3=((5^2-5\cdot2)+2)+((5^2-5\cdot2)+6)+((5^2-5\cdot2)+$

$$+ 10) + ((5^2 - 5 \cdot 2) + 14) + ((5^2 - 5 \cdot 2) + 18) = \\ = 17 + 21 + 25 + 29 + 33.$$

**40.** Обозначим данную сумму $S_n$. Рассмотрим разность

$$S_n - S_n \cdot q = 1 + (2q - q) + (3q^2 - 2q^2) + \ldots + \\ + (nq^{n-1} - (n-1)q^{n-1}) - nq^n = (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) - \\ - nq^n = \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n, \text{ откуда } S_n = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - n\frac{q^n}{1-q}.$$

**41.** $x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - m^2 + 1} = m \pm 1$, $m + 1 > m - 1$, поэтому должны выполняться неравенства $4 \geqslant m + 1$, $m - 1 \geqslant -2$. Отсюда $-1 \leqslant m \leqslant 3$.

**42.** Пусть корни уравнения $x_1$ и $x_2$, тогда $x_1 + x_2 = -\frac{1}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{a}$ и, кроме того, $x_1 - x_2 = 3$. Из первого и третьего уравнений получаем: $x_1 = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{a}\right)$.

Исключим из второго уравнения $x_2$: $x_1(x_1 - 3) = -\frac{2}{a}$.

Подставляя в это уравнение выражение для $x_1$, получим соотношение, которому должно удовлетворять искомое значение $a$:

$$\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{a}\right) - 3\right) = -\frac{2}{a}, \text{ откуда } \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a} - 9 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)_1 = -9, \; a_1 = -\frac{1}{9}; \quad \left(\frac{1}{a}\right)_2 = 1, \; a_2 = 1.$$

**43.** Пусть $\alpha$ является корнем как первого, так и второго уравнения. Умножим первое уравнение на $x$, получим: $x^4 + ax^2 + x = 0$; $\alpha$ — корень этого уравнения, следовательно, справедливы равенства $\alpha^4 + a\alpha^2 + \alpha = 0$ и $\alpha^4 + a\alpha^2 + 1 = 0$. Сравнивая их, видим, что должно выполняться равенство $\alpha = 1$. В этом случае оба уравнения имеют общий корень $x = 1$. При этом $a = -2$.

**44.** Переменная $x$ не может принимать отрицательных значений, так как левая часть уравнения всегда неотрицательна.

**45.** Группируя первое слагаемое с четвертым, а второе с третьим, получаем равенство

$$\frac{2x - b - c}{x^2 - x(b + c) + bc} + \frac{2x - b - c}{x^2 - x(b + c) + ab + ac - a^2} = 0.$$

Отсюда $x_1 = \frac{b + c}{2}$ (при $b \neq c$). Кроме того,

$$\frac{1}{y + bc} + \frac{1}{y + a(b + c - a)} = 0, \text{ где } y = x^2 - x(b + c).$$

$$x_{2,3} = \frac{b + c \pm \sqrt{(a - b)^2 + (a - c)^2}}{2}.$$

Ясно, что подкоренное выражение в последней формуле неотрицательно. Поэтому корни $x_2$ и $x_3$, как и $x_1$, действительны.

**46.** Скорость износа передних шин автомобиля составляет $\frac{1}{n_1}$. Скорость износа задних — $\frac{1}{n_2}$. После того как машина проехала $x$ километров, износ передней шины составил $\frac{x}{n_1}$, износ задней — $\frac{x}{n_2}$. Длину промежуточного пробега машины $x$ выберем так, чтобы, поменяв шины местами, т. е. те из них, которые раньше были на передних колесах, поставить на задние, а те, которые были на задних, — на передние, добиваемся того, чтобы они стерлись одновременно. Для этого длина $x$ должна составлять половину возможного пробега. Полный износ шины, естественно, принимаем за 1.

В результате получаем, что

$$x\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)=1 \text{ и } x=\frac{n_1\cdot n_2}{n_1+n_2}.$$

До второй остановки (когда шины сотрутся совсем) автомобиль пройдет $2x$ километров, т. е. $\frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}$ километров. Путь автомашины удлиняется на $\frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}-n_2=\frac{n_1\cdot n_2-n_2^2}{n_1+n_2}$ километров.

**47.** Пусть длина окружности колеса $A$ равна $x$ сантиметров. Тогда длина окружности колеса $C$ равна $x+1$. Число оборотов, которое сделает колесо $A$, когда колесо $B$ сделает один оборот, равно $\frac{12}{x}$; число оборотов, которое сделает колесо $C$, равно $\frac{12}{x+1}$. Согласно условиям задачи получаем уравнение, сводящееся к квадратному: $\frac{12}{x}=\frac{12}{x+1}+1$, откуда $x_1=3$, $x_2=-4$. Второй корень квадратного уравнения смыслу задачи не удовлетворяет. Следовательно, диаметр колеса $A$ равен $\frac{3}{\pi}$ см, диаметр колеса $C$ равен $\frac{4}{\pi}$ см.

**48.** Траектория движения шара (представляем его, конечно, движущейся точкой) — замкнутая ломаная $PABP$. Вследствие предполагаемой упругости соударения шара с бортом стола угол соударения равен углу отражения, поэтому равны углы $PAO$ и $OAB$, $ABO$ и $OBP$. Следовательно, $OA$ и $OB$ — отрезки биссектрис соответственно углов $A$ и $B$ треугольника $PAB$ (рис. 6). Так как $OA=OB=R$, то равны друг другу углы $OAB$ и $OBA$, а потому равны и вдвое большие углы $BAP$ и $ABP$.

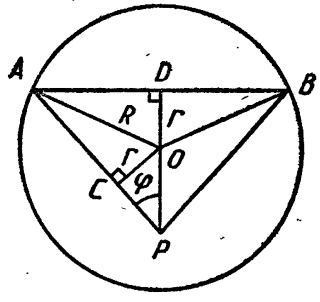


Рис. 6

Продолжим $PO$ до пересечения с $AB$ в точке $D$ и проведем из точки $O$ перпенди-

куляр $OC$ к стороне треугольника $AP$. Треугольник $APB$ равнобедренный ($AP = BP$), точка $O$ расположена на пересечении его биссектрис. Поэтому отрезки $OD$ и $OC$ равны длине $r$ радиуса вписанной в треугольник $APB$ окружности. Определим теперь значение угла $\varphi$.

Из прямоугольного треугольника $OPC$ получаем: $d^2 - r^2 = PC^2$ и $r = d \sin \varphi$. Из подобия треугольников $OPC$ и $DPA$ следует равенство $\frac{PC}{d+r} = \frac{r}{\frac{AB}{2}}$. Без труда находим: $\frac{AB}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$. Исключая из полученной выше пропорции $AB$, $PC$ и $r$, получаем квадратное уравнение $\sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{d^2} \sin \varphi - \frac{R^2}{2d^2} = 0$. По условию задачи угол $\varphi$ острый. Поэтому смыслу задачи удовлетворяет только положительный корень этого уравнения. Находим:

$$\varphi = \arcsin \frac{R\sqrt{R^2 + 8d^2} - R^2}{4d^2}.$$

**49.** Предположим противное, т. е. что такой кирпич из данного кирпича размером $a \times b \times c$ выпилить можно и размер такого кирпича соответственно $x \times y \times z$. Примем для определенности, что $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, $z \leqslant c$, причем хотя бы одно (любое) из этих неравенств строгое, пусть $z < c$. Тогда для полных поверхностей справедливо равенство $ab + bc + ac = 2(xy + xz + yz)$, а для объемов — равенство $abc = 2xyz$. Из последнего равенства получаем:

$$ab = \frac{2xyz}{c}, \quad bc = \frac{2xyz}{a}, \quad ac = \frac{2xyz}{b}.$$

Подставляя эти равенства в формулу равенства площадей поверхностей, приходим после сокращения к равенству

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Но это последнее равенство невозможно. Так как $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, $z < c$, то $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{a}$, $\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{b}$, $\frac{1}{z} > \frac{1}{c}$. Таким образом, предположение привело нас к противоречию. Такой кирпич выпилить нельзя, что и требовалось доказать.

**50.** Имеем: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Поделим последовательно данную сумму на $a_1, a_2, \ldots, a_n$, получим $n$ равенств:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1} &= 1 + \frac{a_2}{a_1} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}, \\
\frac{1}{a_2} &= \frac{a_1}{a_2} + 1 + \ldots + \frac{a_n}{a_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{a_n} &= \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_n} + \ldots + 1.
\end{aligned}$$

Сложим эти равенства, группируя в правой части слагаемые парами: $\frac{a_1}{a_2}$ и $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_1}{a_3}$ и $\frac{a_3}{a_1}$ и т. д. Сумма единиц равна $n$. Подсчитаем, сколько всего в правой части пар скобок: $a_1$ встречается в $n-1$ паре скобок, $a_2$ тоже встречается в $n-1$ паре скобок, но одну пару из них мы уже учли и на долю $a_2$ (без $a_1$) остается $n-2$ пар скобок. Точно так же на долю $a_3$ (без $a_1$ и $a_2$) остается $n-3$ пар скобок. Всего пар скобок оказывается $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

Покажем теперь, что число, содержащееся в каждой паре скобок, не меньше двух. В самом деле, для любых положительных $x_1$ и $x_2$ справедливо неравенство $x_1^2+x_2^2\geqslant 2x_1x_2$. Деля обе части на произведение $x_1x_2$, получаем:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geqslant 2.$$

Теперь мы можем записать, что $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geqslant n+\frac{(n-1)n}{2}\cdot 2=n^2$, что и требовалось.

51. Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ab}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},\quad a-\sqrt{ab}+b\geqslant\sqrt{ab},$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

Последнее из них верно, значит, верны и остальные.

52. Имеем:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\geqslant 1.$$

Но $a^2+b^2\geqslant 2ab$, поэтому $2a^2+2b^2\geqslant 1$ и $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$, $a^4+b^4+2a^2b^2\geqslant\frac{1}{4}$ и $2a^4+2b^4\geqslant\frac{1}{4}$, откуда, действительно, $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$. Равенство достигается лишь при $a=b=\frac{1}{2}$.

53. Поскольку среднее арифметическое не меньше среднего геометрического, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{ac}},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{bc}}.$$

Складывая соответственно левые и правые части неравенств, получаем требуемое неравенство:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.$$

**54.** Так как $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, то

$$c(a^2 + b^2) \geqslant 2abc,$$
$$a(b^2 + c^2) \geqslant 2abc,$$
$$b(a^2 + c^2) \geqslant 2abc.$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geqslant 6abc.$$

Докажем второе неравенство. Так как $a^2 + b^2 - ab \geqslant ab$, то $(a + b)(a^2 + b^2 - ab) \geqslant ab(a + b)$, $a^3 + b^3 \geqslant ab(a + b)$.

Точно так же получаем:

$bc(b + c) \leqslant (b^2 + c^2 - bc)(b + c) = b^3 + c^3$, $ac(a + c) \leqslant a^3 + c^3$.

Складывая полученные неравенства, приходим к требуемому:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \leqslant 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

**55.** Ясно, что справедливы следующие $n$ соотношений: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, ..., $\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Поэтому $S_n > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, что и нужно доказать.

**56.** Рассмотрим неравенство, равносильное данному:

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c).$$

Вычитая из обеих частей неравенства по $a^3 + b^3 + c^3$, получаем:

$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant (a + b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca.$

Перегруппируем слагаемые в левой части:

$$(a^3 + b^3) + (a^3 + c^3) + (b^3 + c^3) =$$
$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (b + c)(b^2 - bc + c^2) +$$
$$+ (a + c)(a^2 - ac + c^2) \geqslant$$
$$\geqslant (a + b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca.$$

Значит, и данное неравенство справедливо.

**57.** Средний возраст одного здания составляет $\frac{T}{n}$. Пусть возраст снесенного здания равен $t$. Тогда общий возраст оставшихся домов составит $T - t$. Средний же возраст одного здания теперь равен $\frac{T-t}{n-1}$.

Если построим новый дом, то общий возраст домов не изменится и будет равен $T$, а средний возраст составит $\frac{T}{n+1}$. Сравним $\frac{T-t}{n-1}$ и $\frac{T}{n+1}$. Если больше окажется первая из этих величин, то город больше помолодеет от постройки, если вторая, то от сноса, если они равны, то город помолодеет в обоих случаях одинаково.

Определим например, при каких значениях $t$ город больше помолодеет от сноса старого здания: $\frac{T-t}{n-1} < \frac{T}{n+1}$, откуда $t > (n-1) \times \left(\frac{T}{n-1} - \frac{T}{n+1}\right) = \frac{2T}{n+1}$. Итак, при $t < \frac{2T}{n+1}$ город больше помолодеет от сноса старого здания, при $t < \frac{2T}{n+1}$ город больше помолодеет от постройки нового.

**58.** Воспользовавшись тем, что $a$, $b$ и $c$ — стороны треугольника, запишем: $b + c > a$. Поэтому $2(b + c) > a + b + c$. Аналогично $2(a + b) > a + b + c$, $2(c + a) > a + b + c$. Отсюда следует, что

$$\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}, \quad \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}, \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c} \text{ и}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{(a+b+c)} = 2,$$

что и требовалось доказать.

**59.** Из условия сразу следует справедливость следующего двойного неравенства: $|b - c| < a < b + c$. Поэтому

$$b^2 + c^2 - 2bc < a^2 < b^2 + c^2 + 2bc,$$
$$-2bc < a^2 - b^2 - c^2 < 2bc, \text{ или } |a^2 - b^2 - c^2| < 2bc.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат и приведя подобные члены, получаем требуемое.

**60.** Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Тогда $OA + OB > AB$, $OC + OD > CD$. Сложив неравенства, получим: $AC + BD > AB + CD$. Но по условию задачи $CD = AB + BD - AC$. Поэтому $AC + BD > AB + AB + BD - AC$. Отсюда $AC > AB$, что и требовалось доказать.

## 9 класс

**61.** Если $x \leqslant 0$, то $|x| = -x$ и $|x| = -x = \max(x, -x)$.

Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $|x| = x = \max(x, -x)$. Все возможные случаи рассмотрены.

**62.** Пусть $x \geqslant y$. Тогда $\frac{1}{2}\{x - y + x + y\} = x = \max(x, y)$.

Пусть $x < y$. Тогда $\frac{1}{2}\{-x + y + x + y\} = y = \max\{x, y\}$, что и требовалось доказать. Все возможные случаи разобраны.

**63.** а) $\max(x, y, z) = \max\{z, \max(x, y)\} =$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left|z - \frac{|x-y| + x + y}{2}\right| + z + \frac{|x-y| + x + y}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{|2z - |x-y| - x - y| + 2z + |x-y| + x + y\}.$$

б) Наименьшее из трех чисел можно найти, воспользовавшись следующей очевидной формулой:

$$\min(x, y, z) = -\max(-x; -y; -z) =$$
$$= -\frac{1}{4}\{|x + y - 2z - |y - x|| - 2z + |y - x| - x - y\}.$$

в) Среднее из $x$, $y$, $z$ (трех произвольных чисел) равно:

$$x + y + z - \max(x, y, z) - \min(x, y, z) =$$
$$= (x + y + z - \max(x, y, z) + \max(-x, -y, -z)) =$$
$$= \frac{1}{4}\{2x + 2y + |x + y - |x - y| - 2z| - |-|x - y| - x - y + 2z|\}.$$

**64.** Рассмотрим $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$. Эта функция принимает значение 1 при $x > 0$, $-1$ при $x < 0$, не определена при $x = 0$. Прибавляя к правой части 1, получаем функцию, которая равна 0 при $x < 0$, 2 при $x > 0$. А условию задачи удовлетворяет функция $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{x} + 1\right)$.

**65.** а) $\varphi_1(-x) = f(-x) + f(x) = f(x) + f(-x) = \varphi_1(x)$, так как $\varphi_1(-x) = \varphi_1(x)$, то функция $\varphi_1(x)$ четная;

б) $\varphi_2(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x))$; $\varphi_2(-x) = -\varphi_2(x)$, следовательно, функция эта нечетная.

**66.** Пусть $x_0$ — такое значение $x$, что $f_1(x_0) > 0$ и $f_2(x_0) > 0$. Тогда справедливы неравенства $f_1(x_0) + f_2(x_0) > 0$ и $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) > 0$.

Примем теперь, что $f_1(x_0) + f_2(x_0) > 0$ и $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) > 0$. Предположим сначала, что одно из чисел $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$ неположительно. Тогда придем к противоречию, поскольку оказывается, что $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \leqslant 0$. Допустим, что оба числа $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$ неположительны. Но тогда и их сумма неположительна. Мы вновь пришли к противоречию. Остается возможным только случай, когда оба этих слагаемых положительны. Тем самым утверждение доказано.

**67.** Предположим противное. Тогда $f(x + T) = f(x)$, $\cos(x + T) + \cos\lambda(x + T) = \cos x + \cos\lambda x$. Пусть $x = 0$, тогда $\cos T + \cos\lambda T = 2$. Следовательно, должно быть: $\cos T = 1$, $\cos\lambda T = 1$, $T = 2\pi k$ и $\lambda T = 2\pi n$; $\lambda = \frac{n}{k}$. Значит, $\lambda$ — рациональное число. Пришли к противоречию.

**68.** $f(x + 2a) = f((x + a) + a) = \frac{1 + f(x + a)}{1 - f(x + a)} = \frac{1 + \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} =$

$$= -\frac{1}{f(x)}.$$

Поэтому $f(x + 4a) = f(x)$. Функция периодическая, и ее период равен $4a$.

**69.** Примем $x = a + t$. Тогда $f(x) = f(a + t) = f(t) f(t + 2a)$. Следовательно, $f(a + x) = f(x) f(x + 2a)$.

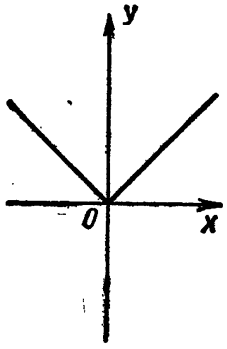



Рис. 7

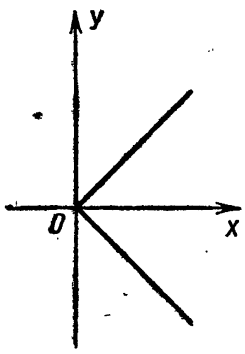



Рис. 8

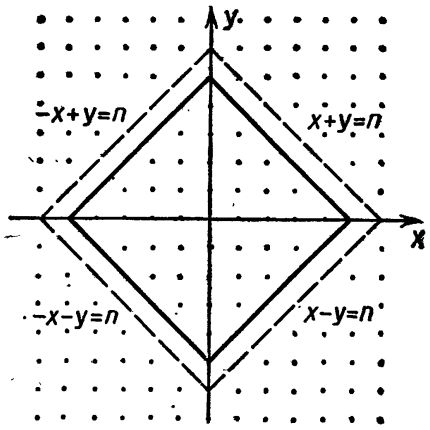



Рис. 9

Приравнивая два значения $f(x)$, находим: $f(x-a)=\frac{1}{f(x+2a)}$ или $f(x)=\frac{1}{f(x+3a)}$. Но в свою очередь $f(x+3a)=\frac{1}{f(x+6a)}$. Поэтому $f(x)=f(x+6a)$. Это равенство показывает, что функция $f(x)$ периодическая, причем ее период $6a$.

**70.** а) Рис. 7; б) рис. 8.

**71.** а) График $|x|+|y|<n$ — это внутренняя часть квадрата, стороны которого — отрезки прямых $x+y=n$, $-x+y=n$, $x-y=n$, $-x-y=n$.

Внутрь квадрата $|x|+|y|<n$ попадают все те и только те точки координатной плоскости с целочисленными координатами, которые удовлетворяют нестрогому неравенству $|x|+|y|\leqslant n-1$ (рис. 9). Поэтому сначала найдем ответ на задание б).

б) На прямой $x+y=n$ лежит $n+1$ точка с целочисленными координатами, на прямой $-x+y=n$ еще $n+1$ точка с целочисленными координатами, но одна из них принадлежит и прямой $x+y=n$. Поэтому к $n+1$ точке добавляется $n$ новых. Переход к прямой $-x-y=n$ добавляет еще $n$ точек; наконец, переход к прямой $x-y=n$ добавляет $n-1$ точку с целочисленными координатами. Всего на сторонах квадрата оказывается $n+1+n+n+n-1$ точек, т. е. $4n$ точек. На сторонах соседнего с ним внутреннего квадрата находится $4(n-1)$ точек и т. д. Началу координат соответствует одна точка. Итак, всего точек с целочисленными координатами на границах и внутри квадрата $|x|+|y|=n$ будет: $1+4\cdot 1+4\cdot 2+\ldots+4\cdot n=1+4(1+2+3+\ldots+n)=1+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}=1+2n(n+1)$. Таков ответ к заданию б). В задании а) ответ такой: $1+2n(n-1)$.

**72.** Если $x<\frac{1}{2}$, то $x<1-x$. Поэтому $y=x$ при $x<\frac{1}{2}$. Если

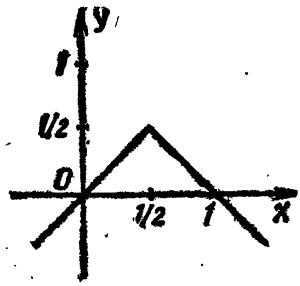



Рис. 10

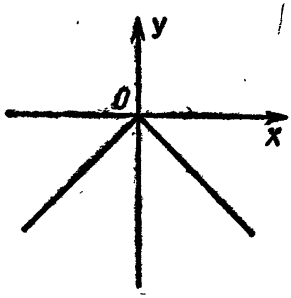



Рис. 11

$x > \frac{1}{2}$, то $x > 1 - x$. Поэтому $y = 1 - x$ при $x > \frac{1}{2}$. Если $x = \frac{1}{2}$, то $x = 1 - x$. Этот случай можно объединить либо с $x < \frac{1}{2}$, либо с $x > \frac{1}{2}$. В результате получаем «кусочный» способ задания функции:

$$y = \begin{cases} x \text{ при } x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - x \text{ при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 10.

График функции $y = -|x|$ имеет вид, показанный на рисунке 11. График данной функции получается из графика функции $y = -|x|$ параллельным переносом так, что начало координат переходит в точку с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Поэтому аналитическая запись данной функции такая:

$$y = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

**73.** Возможный вариант ответа на эту задачу $s = v_0 t + \frac{gt^2}{4}\left(\frac{|t-\tau| + t - \tau}{t - \tau}\right)$, где $\tau$ — аргумент. При его получении использовалось решение задачи 62.

**74.** Предположим противное. Пусть $x_0 = \frac{p}{q}$ ($p$ и $q$ взаимно просты) — корень данного многочлена.

Тогда

$$P_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0.$$

Для того чтобы это равенство удовлетворялось, сумма

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q}$$

должна быть целым числом, т. е.

$$p^n + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1}$$

должно делиться на $q$ без остатка. Но это невозможно. В последней сумме слагаемое $p^n$ не делится на $q$, а все прочие делятся. Таким образом, сумма на $q$ делиться без остатка не может.

**75.** Перепишем данную последовательность 0; 2; 2; 4; 4; 6; 6; ... в виде 1—1; 2; 3 — 1; 4; 5 — 1; ... .

Видим, что данную последовательность можно получить из последовательности натурального ряда чисел, если четные числа оставить без изменения, а из нечетных вычесть по единице. Таким образом, нам требуется сконструировать слагаемое, которое бы равнялось —1 при $n$ нечетном и нулю при $n$ четном. Такое слагаемое имеет вид: $\frac{(-1)^n - 1}{2}$. Действительно, при нечетном значении $n$ $(-1)^n = -1$ и $\frac{(-1)^n - 1}{2} = -1$; при четном значении $n$ $\frac{(-1)^n - 1}{2} = 0$.

Поэтому можно записать, что

$$b_n = n + \frac{(-1)^n - 1}{2} = n - \frac{(-1)^{n-1} + 1}{2}.$$

Заметим, что $(-1)^n = \cos \pi n$ и $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} = \cos \pi (n+1)$.

**76.** Вновь, как и в ходе решения предыдущей задачи, полезно сравнить данную последовательность с последовательностью чисел натурального ряда. Для этого можно поступить, например, так: вычесть почленно из чисел данной последовательности числа натурального ряда. В результате получим новую последовательность: 1; 0; —1; 0; 1; 0; —1; ... . Эта последовательность может быть представлена как последовательность значений тригонометрической функции $y = \cos \frac{\pi}{2} (n-1)$ натурального аргумента. Так как $y$ — периодическая функция аргумента $n$, то $n$-й член данной последовательности можно представить в виде $b_n = n + \cos \frac{\pi}{2} (n-1)$.

Конечно, может возникнуть вопрос: почему в предыдущей задаче ответ содержит $(-1)^n$, а в данной содержит косинус? Нельзя ли обойтись без косинуса? Ответ на этот вопрос пока оставим открытым и вернемся к нему позднее, когда будет построен график, изображенный на рисунке 3.

**77.** Нетрудно увидеть, что при $x \in [-1; 0[$ аналитической записью функции $y$ служит $y = -x$; при $x \in [0; 1[$ $y = x$; при $x \in [1; 2[$ $y = 2 - x$, при $x \in [2; 3[$ $y = x - 2$; при $x \in [3; 4[$ $y = 4 - x$; при $x \in [4; 5[$ $y = x - 4$ и т. д.

Последовательность 0; 2; 2; 4; 4; ... известна из задачи 75. Ее $n$-й член равен $n - \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$.

Искомая функция имеет вид:

$y = \left| x - n + \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2} \right|$, где $n = [x]$, т. е. целая часть $x$.

Действительно, если $x \in [0; 1[$, то $n = 1$, $(-1)^{n-1} = 1$ и $y = |x| = x$, поскольку $x \geqslant 0$. Если $x \in [1; 2[$, то $y = |x - 2|$, но $x < 2$, поэтому $y = 2 - x$ и т. д.

**78.** Воспользуемся результатом, полученным в ходе решения предыдущей задачи. Если график, изображенный на рисунке 2, растянуть в два раза в направлении оси ординат и в два раза в направлении оси абсцисс, затем сдвинуть его на единицу влево относительно оси абсцисс и на единицу вниз относительно оси ординат, то как раз и получим график, изображенный на рисунке 3.

Растяжение вдвое по оси абсцисс достигается, как известно, заменой переменной $x$ на $\frac{x}{2}$. Аналогичную замену применяем при растяжении графика вдвое по оси ординат. В новых переменных получаем:

$$y = |x - 2n + 1 + (-1)^{n-1}|.$$

Сдвиг по оси абсцисс на единицу влево осуществляется переходом к новой переменной $x_1 = x + 1$, сдвиг по оси ординат на единицу вниз осуществляется переходом к новой переменной $y_1 = y + 1$. В результате получаем в новых переменных (опуская индексы в обозначениях):

$$y = -1 + |x - 2n + 2 + (-1)^{n-1}|.$$

Замечание. Используя последнюю формулу, можно получить формулу (без косинуса переменной) для отыскания $n$-го члена последовательности, приведенной в задаче 76.

**79.** Запишем $n$-й член последовательности так: $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$. Теперь ясно, что с возрастанием $n$ $a_n$ уменьшается.

**80.** Пусть удалось выполнить деление без остатка. Тогда имеет место тождество:

$$(2x^2 + x - 1)(cx^2 + dx + e) = 12x^4 - 17x^2 + ax + b.$$

Выполним умножение в левой части и сгруппируем слагаемые:

$$2c \cdot x^4 + (c + 2d) \cdot x^3 + (d + 2e - c)\, x^2 + (e - d) \cdot x - e = \\ = 12x^4 - 17x^2 + ax + b.$$

Это тождество справедливо при любых значениях $x$, если коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и в правой частях равны: $2c = 12$, откуда $c = 6$; $c + 2d = 0$, откуда $d = -3$; $d + 2e - c = -17$, откуда $e = -4$; $e - d = a$, откуда $a = -1$, наконец, $b = 4$.

Таким образом, данный многочлен делится на многочлен $2x^2 + x - 1$ без остатка в том и только в том случае, если $a = -1$ и $b = 4$.

**81.** Находим: $t = \frac{x - b}{a} = \frac{y - d}{c}$, $cx - ay - bc + ad = 0$.

Это уравнение прямой. Следовательно, $y$ и $x$ связаны линейной зависимостью.

**82.** Хотя характер параметрического задания в этой задаче отличается от задания в предыдущей задаче, но и в этом случае зависимость $y$ от $x$ оказывается линейной. Находим: $\cos^2 t = \frac{x-b}{a}$, $\sin^2 t = \frac{y-d}{c}$. Складывая соответственно левые и правые части последних равенств, получаем:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = \frac{x-b}{a} + \frac{y-d}{c}.$$

Откуда $cx + ay - bc - ad - ac = 0$. Однако на этот раз получаем не прямую, а отрезок прямой, так как возможные значения $x$ и $y$ ограничены и снизу, и сверху.

**83.** Получаем: $(x-b)^2 + (y-c)^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$. Это уравнение окружности радиуса $a$ с центром в точке $(b; c)$. Зависимость между $y$ и $x$ является «разновидностью» квадратичных зависимостей.

**84.** Введем параметр. Положим, например, $\frac{y}{x} = t$. Тогда $x^{\frac{y}{x}} = y$ и $y = x^t$. Поэтому $\frac{y}{x}$ можно записать еще и иначе: $\frac{y}{x} = x^{t-1}$, откуда $t = x^{t-1}$. Из последнего равенства находим: $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ и $y = t^{\frac{t}{t-1}}$.

**85.** Имеем:

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x) = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) + \\ &\quad + k((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x) = \\ &= ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x) + k(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) = \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x + k - 2k \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 + k - (3 + 2k)\sin^2 x \cos^2 x. \end{aligned}$$

а) Для того чтобы $y$ не зависел от $x$, необходимо, чтобы $3 + 2k = 0$, т. е. $k = -\frac{3}{2}$.

б) Должно быть:

$$1 + k = \frac{3 + 2k}{4} \sin^2 2x.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \frac{4(1+k)}{3+2k} \leqslant 1 \text{ или } 0 \leqslant \frac{6+4k}{3+2k} - \frac{2}{3+2k} \leqslant 1,\ 0 \leqslant 2 - \frac{2}{3+2k} \leqslant 1,$$

откуда

$$\begin{cases} 3 + 2k \geqslant 1, \\ 3 + 2k \leqslant 2, \end{cases} \quad \begin{cases} k \geqslant -1, \\ k \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $-1 \leqslant k \leqslant -\frac{1}{2}$.

86. Геометрический способ решения.

Рассмотрим сектор $OAB$ окружности с центром в точке $O$. Пусть радиус окружности равен 1, а угол $AOB$ равен 36°. Проведем хорду окружности $AB$ и выберем на отрезке $OB$ точку $C$ так, чтобы отрезки $AC$ и $AB$ были равны. В этом случае каждый из углов $ACB$ и $ABC$ равен 72°. Значит, угол $CAB$ равен 36°. Угол $OAC$ равен 36°, и поэтому, во-первых, треугольник $OAC$ равнобедренный ($OC = AC$), во-вторых, прямая $AC$ — биссектриса угла $OAB$. Длина отрезка $OA$ по условию равна 1, длину отрезка $AB$ примем за $x$. Поскольку $AC$ — биссектриса, то точка $C$ делит сторону $OB$ на отрезки, пропорциональные сторонам $OA$ и $AB$ треугольника $OAB$. Поэтому справедлива пропорция $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, откуда $x^2 + x - 1 = 0$. По условию задачи $x$ — положительное число, значит, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Но $x = 2 \sin 18°$. Поэтому $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Способ решения, опирающийся на тригонометрические формулы.

Справедливы равенства $3 \cdot 18° = 54°$, $2 \cdot 18° = 36°$. Но $\cos 54° = \sin 36°$, т. е. $\cos 3 \cdot 18° = \sin 2 \cdot 18°$.

$$\begin{gathered}\cos 3 \cdot 18° = \cos (2 \cdot 18° + 18°) = \\ = \cos 2 \cdot 18° \cdot \cos 18° - \sin 2 \cdot 18° \cdot \sin 18° = \\ = (1 - 2 \sin^2 18°) \cos 18° - 2 \sin^2 18° \cdot \cos 18° = \\ = (1 - 4 \sin^2 18°) \cos 18°.\end{gathered}$$

Но $\sin 36° = 2 \cdot \sin 18° \cdot \cos 18°$, следовательно, $1 - 4 \sin^2 18° = 2 \sin 18°$ и $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, так как $\sin 18° > 0$.

87. Понятно, что $(a + b + c)^2 = 0$. Возведем в квадрат, получим: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$. Слагаемое $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 0$, причем оно равно нулю только в том случае, если $a = b = c = 0$. Следовательно, должно быть: $ab + bc + ca \leqslant 0$, причем и здесь знак равенства выполняется, только если $a = b = c = 0$.

88. Пусть $\frac{a_1}{b_1} = c_1$, $\frac{a_2}{b_2} = c_2$, ..., $\frac{a_n}{b_n} = c_n$. Примем для определенности, что $\frac{a_n}{b_n}$ — наибольшая дробь, а $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ — наименьшая. Если это не выполняется, то перенумеруем дроби так, чтобы $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ стала наименьшей дробью, а $\frac{a_n}{b_n}$ — наибольшей. Это всегда можно сделать. Тогда

$$\frac{a_1}{b_1} \leqslant c_n, \quad \frac{a_2}{b_2} \leqslant c_n, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leqslant c_n, \quad \frac{a_n}{b_n} = c_n.$$

Знак равенства имеет место, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, или

$$a_1 \leqslant c_n b_1, \quad a_2 \leqslant c_n b_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1} \leqslant c_n b_{n-1}, \quad a_n = c_n b_n.$$

Сложив соответственно левые и правые части, получим:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqslant c_n (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant c_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Точно так же доказываем, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \geqslant c_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}.$$

**89.** Обозначим $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа, среди которых есть не равные между собой. Тогда, поскольку количество этих чисел конечное, то среди них найдутся наименьшее и наибольшее числа. Примем для определенности, что $x_1$ — наименьшее, а $x_2$ — наибольшее. Пусть $x_{ср}$ есть среднее арифметическое этих двух чисел. Если мы теперь заменим $x_1$ на $x_{ср}$ и $x_2$ на $x_{ср}$, то сумма $x_{ср} + x_{ср}$ будет равна сумме $x_1 + x_2$ (в самом деле, по определению $x_{ср} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2x_{ср}}{2}$). Можно записать, что $x_1 = x_{ср} - \alpha$, $x_2 = x_{ср} + \alpha$. А вот произведение $x_1 \cdot x_2$ меньше, чем $x_{ср}^2$: оно равно $x_{ср}^2 - \alpha^2$. Повторяя эту процедуру, мы всякий раз увеличиваем значение произведения. Остается показать, что в пределе мы должны получить наибольшее произведение тогда, когда все новые числа (обозначим их $x_1'$, $x_2'$, ..., $x_n'$) равны между собой. Заметим еще, что в этом случае среднее геометрическое $n$ чисел равно их среднему арифметическому. Действительно, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = \bar{x} = \sqrt[n]{\bar{x}^n}$.

Предположим, что максимальное значение произведения чисел $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ достигается, если не все из этих чисел равны между собой. Но тогда, действуя вышеописанным образом, мы всегда можем увеличить значение произведения этих чисел и их среднего геометрического. Значит, предположение о том, что наибольшее значение среднего геометрического достигается при неравных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$, было ложным. Итак, наибольшее значение произведения $x_1 \cdot x_2 \times \ldots \cdot x_n$ достигается тогда, когда все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при постоянной их сумме равны между собой. Это наибольшее значение есть $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Следовательно, получаем окончательно, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

**90.** $$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}{n+1}=$$
$$=\frac{(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{(n+1)n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Итак, получаем, что среднее арифметическое в результате описанной в условии задачи процедуры не изменится. Вместе с тем ясно, что если $x_{n+1}>\bar{x}$, то $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}}{n+1}>\bar{x}$. Если же $x_{n+1}<\bar{x}$, то $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}}{n+1}<\bar{x}$.

**91.** Используя неравенство Коши, получаем:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)\geqslant\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}\ldots\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_1}}=1.$$

Отсюда сразу и следует требуемое неравенство.

**92.** Нельзя. Левую часть неравенства (2) можно представить в виде

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\right),$$

причем при одних значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n$ больше может оказаться сумма слагаемых, заключенных в первую пару скобок, а при других — сумма слагаемых, заключенных во вторую пару скобок. В первом случае левая часть неравенства (1) больше, чем левая часть неравенства (2), во втором — меньше.

**93.** Применяя неравенство Коши для двух величин, имеем:

$$\frac{y+z}{2}\geqslant\sqrt{yz},\ \frac{x+z}{2}\geqslant\sqrt{xz},\ \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

Перемножая левые и правые части неравенств, получаем:

$$(x+y)(x+z)(y+z)\geqslant 8xyz,$$
$$\left(\frac{x+y}{z}\right)\left(\frac{x+z}{y}\right)\left(\frac{y+z}{x}\right)\geqslant 8,$$
$$\frac{x+y+z-z}{z}\cdot\frac{x+y+z-y}{y}\cdot\frac{x+y+z-x}{x}\geqslant 8,$$
$$\frac{1-z}{z}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-z}{x}\geqslant 8,$$
$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geqslant 8.$$

**94.** При любых, так как каждое из трех слагаемых левой части неравенства больше, чем $\dfrac{1}{a+b+c}$.

**95.** Имеем: $\varphi(x)=x+x^{-1}\geqslant 2$. Но $f(x)=\sqrt{ab}\cdot\varphi\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot x\right)$. В самом деле,

$$f(x) = \sqrt{ab} \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x\right)^{-1}\right) \geqslant 2\sqrt{ab},$$

что и требовалось доказать.

**96.** На основании неравенства Коши имеем:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Перемножая соответственно левые и правые части этих неравенств, получаем требуемое неравенство.

**97.** Рассмотрим правую часть данного неравенства:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + 2a_2(a_3 + a_4 + \ldots + a_n) + \ldots + 2a_n a_{n-1}.$$

Значение этого выражения не уменьшится, если мы заменим в нем попарные произведения на суммы соответствующих квадратов:

$$2a_1a_2 \leqslant a_1^2 + a_2^2,\ 2a_1a_3 \leqslant a_1^2 + a_3^2,\ \ldots,\ 2a_{n-1}a_n \leqslant a_{n-1}^2 + a_n^2.$$

При такого рода замене $a_1^2$ будет повторено слагаемым $n$ раз, $a_2^2$ — также $n$ раз и т. д. Поэтому и получаем требуемое неравенство. Оно превращается в равенство, если все $a_i$ равны между собой. Действительно,

$$n \cdot \underbrace{(a_1^2 + a_1^2 + \ldots + a_1^2)}_{n \text{ слагаемых}} = n^2a_1^2 \text{ и } \underbrace{(a_1 + a_1 + \ldots + a_1)^2}_{n \text{ слагаемых}} = n^2a_1^2.$$

**98.** 1-е *решение*. Замечаем, что справедливы неравенства $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$, ... и вообще для всякого натурального $n$ $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$ (поскольку $4n^2 - 1 < 4n^2$).

Рассмотрим: $q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2498}{2499}$. Из условия ясно, что $p < q$, поэтому $p^2 < pq$. Но $p \cdot q = \frac{1}{2500}$. Следовательно, $p^2 < \frac{1}{2500}$, $p < \frac{1}{50} = 0{,}02$.

2-е *решение*. $p^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2499^2}{2500^2}$.

Замечаем, что

$$p^2 < \frac{2^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2 - 1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2499^2}{2500^2 - 1^2}$$

и

$$(2n)^2 - 1^2 = (2n-1)(2n+1),$$

поэтому

$$p^2 < \frac{1^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{2499}{2499 \cdot 2501} = \frac{1}{2501}$$

и $p^2 < \frac{1}{2500}$, следовательно, $p < 0{,}02$.

**99.** Всего слагаемых в данной сумме $n$. Действительно, как можно заметить, номер каждого дробного слагаемого равен значению второго слагаемого в его знаменателе. Самое большое из слагаемых — первое, потому что при равных числителях у него меньший знаменатель. Поэтому сумма меньше, чем $\frac{n}{n+1} < 1$. Далее, каждое из слагаемых больше, чем $\frac{1}{2n}$. Значит, их сумма больше, чем $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

**100.** Примем в неравенстве Коши, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 1$, $x_n = 1 + x$. Тогда из неравенства Коши будет следовать, что

$$\frac{1+1+\ldots+1+1+x}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+x} \quad \text{или} \quad 1 + \frac{x}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+x}.$$

**101.** $\frac{a^m + b^m}{a-b}$ есть сумма $m$ членов геометрической прогрессии вида $a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + a^1 b^{m-2} + b^{m-1}$. Нетрудно заметить, что сумма показателей степени у $a$ и $b$ в любом слагаемом равна $m - 1$. Ясно, что эта сумма меньше, чем $ma^{m-1}$.

Аналогично показываем, что эта сумма больше, чем $mb^{m-1}$. Отсюда следует двойное неравенство Коши:

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a-b} > mb^{m-1}.$$

**102.** Имеем:

$$\sqrt[4]{6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} < \frac{6+6+7+7}{4} = 6{,}5.$$

С уточненной верхней границей получаем: $6 < \sqrt[4]{6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} < 6{,}5$.

**103.** Пусть в двойном неравенстве Коши $a = m + 1$, $b = m$. Имеем:

$$m(m+1)^{m-1} > \frac{(m+1)^m - m^m}{m+1-m}.$$

Левую часть неравенства представим так:

$$(m+1)(m+1)^{m-1} - (m+1)^{m-1} = (m+1)^m - (m+1)^{m-1}.$$

Итак,

$$(m+1)^m - (m+1)^{m-1} > (m+1)^m - m^m.$$

Следовательно, $m^m > (m+1)^{m-1}$, или $\sqrt[m-1]{m} > \sqrt[m]{m+1}$, при $m \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

**104.** Умножая обе части данного неравенства на $(m+1)^2$, получим:

$$m^m (m+1)^2 > (m+1)^{m+1},$$

или

$$(m+1)^2 > \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

Давая $m$ значения от 1 до $n-1$, находим:

$$2^2 = \frac{2^2}{1^1},\ 3^2 > \frac{3^3}{2^2},\ 4^2 > \frac{4^4}{3^3},\ \ldots,\ n^2 > \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}.$$

Перемножая соответственно левые и правые части этих неравенств, получаем:

$$(n!)^2 > \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-1} \cdot n^n}{2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-1}} = n^n.$$

Следовательно, $n! > n^{\frac{n}{2}}$, что и требовалось доказать.

**105.** Преобразуем данную сумму к виду $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{xy}$. Ясно, что частное от деления 1 на $xy$ принимает наименьшее значение тогда, когда произведение $xy$ принимает наибольшее при данных условиях значение. По условию $xy = x(1-x)$. Следовательно, $xy$ принимает наибольшее значение тогда, когда $x = 1 - x$, т. е. когда $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Наименьшее значение выражения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ равно 4.

**106.** а) Наибольшее значение $\cos x$ равно 1, наибольшее значение $\cos 2x$ тоже равно 1. Значит, наибольшее значение $y$ может быть при тех значениях $x$, когда $\cos x$ и $\cos 2x$ одновременно равны 1. Рассмотрим совместно графики функций $y = \cos x$ и $y = \cos 2x$. Из графиков можно увидеть, что максимум достигается в точках $x = 2k\pi$, $y_{max} = 2$.

Для решения задачи можно было воспользоваться и производной.

б) Даже не строя график, теперь легко догадаться, что наибольшее значение вновь достигается в точках $x = 2k\pi$, $y_{max} = 3$.

**107.** Поскольку в треугольнике $\sin A = \sin(180° - (B+C)) = \sin(B+C)$ и, кроме того,

$$\sin(B+C) = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} \quad \text{и}$$

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

то данное равенство можно переписать в виде

$$2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 1.$$

Но $\frac{B}{2} < 90°$, тем более $\frac{B-C}{2} < 90°$. Косинус меньшего угла $\frac{B-C}{2}$ больше, чем косинус большего угла $\frac{B+C}{2}$. Поэтому $4 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} < 1$ и $\sin (B + C) < \frac{1}{2}$. Так как синус меньше $1/2$, то аргумент синуса меньше 30°.

**108.** $|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x}$; $|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x}$.

$$\sqrt{1 + 2|\sin x \cdot \cos x|} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}} =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}} =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x + 2\sqrt{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\cos^2 x} + \cos^2 x} =$$
$$= |\,|\sin x| + |\cos x|\,| = |\cos x| + |\sin x|,$$

что и требовалось доказать.

**109.** Замечаем, что $2{,}6^2 = 6{,}76$; $2{,}4^2 = 5{,}76$. Дальнейшие рассуждения очевидны.

**110.** Замечаем, что $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} > 0$. Поэтому $\lg (7 - 4\sqrt{3}) = 2 \lg (2 - \sqrt{3})$. Выполняя деление, получаем 2.

**111.** Воспользуемся неравенством $\lg 49 < \lg 50$. Левую часть можно записать так: $2 \lg 7$, а правую так: $2 \lg 5 + \lg 2$. Заметим, что $\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$. Поэтому правая часть может быть записана в виде $\lg 5 + 1$. Отсюда и получаем, что $2\lg 7 < 1 + \lg 5$ и $\lg 7 < \frac{1 + \lg 5}{2}$.

**112.** Имеем очевидные равенства:

$$\log_4 60 = \log_4 4 \cdot 15 = 1 + \log_4 15,$$
$$\log_3 30 = \log_3 3 \cdot 10 = 1 + \log_3 10.$$

Поэтому задача сводится к выяснению, какое из двух чисел больше: $\log_4 15$ или $\log_3 10$.

Ясно, что первое из них меньше 2, второе больше. Поэтому второе из двух данных чисел больше, чем первое.

**113.** Ясно, что $1 < \log_3 7 < 2$ и $1 < \log_7 27 < 2$. Из этих неравенств получаем, что

$$2 < \log_3 7^2 < 4 \text{ и } 2 < \log_7 27^2 < 4,$$

или

$$2 < \log_3 49 < 4 \text{ и } 2 < \log_7 729 < 4.$$

Уточняя эти двойные неравенства, получаем соответственно $3 < \log_3 49 < 4$ и $3 < \log_7 729 < 4$. Отсюда следует, что $6 < \log_3 2401 < 8$ и $6 < \log_7 531441 < 8$. Находим, что $3^7 = 2187$ и $7^7 = 823543$. Поэтому $7 < \log_3 2401 < 8$ и $6 < \log_7 531441 < 7$. Следовательно, первый логарифм больше, чем второй, т. е. $\log_3 7 > \log_7 27$.

**114.** Логарифмируя по основанию $b$ обе части, получаем:

$$\log_b c \log_b a = \log_b a \lg_b c.$$

**115.** Рассмотрим $\lg \sqrt[n]{n!} = \frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n}{n}$ и проверим, будет ли эта функция от $n$ монотонной. Если, например, окажется, что $\lg \sqrt[n]{n!}$ возрастает с ростом $n$, то и $\sqrt[n]{n!}$ также возрастает с ростом $n$. Тогда ответ на вопрос, поставленный в условии, не составит труда.

Вместе с тем ясно, что $\lg (n + 1)$ больше $\lg n$ и, значит, больше, чем среднее арифметическое чисел $\lg 1$, $\lg 2$, ..., $\lg n$. Воспользовавшись результатом задачи 90, получаем, что

$$\frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg (n+1)}{n+1} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n}{n}.$$

Итак, функция $\lg \sqrt[n]{n!}$ целочисленного аргумента монотонно возрастает с ростом $n$. Следовательно, $\sqrt[10]{10!} > \sqrt[9]{9!}$.

**116.** Прежде всего замечаем, что данная функция нечетная. Поэтому ее график симметричен относительно начала координат. Когда значения $x$ близки к нулю и $x > 0$, значения данной функции близки к значениям функции $y = \frac{1}{x}$, хотя и несколько больше их. Когда значения $x$ стремятся к бесконечности, значения данной функции мало отличаются от значений функции $y = x$, хотя и несколько больше их. Ясно, что поскольку на рассматриваемом промежутке функция непрерывна, то она должна иметь здесь минимум. По этому описанию вполне можно построить график. Он приведен на рисунке 12.

**117.** Данная функция нечетная. При положительных близких к нулю значениях $x$ она мало отличается от функции $y = -\frac{1}{x}$, при этом значения данной функции несколько больше. При значениях $x \to \infty$ данная функция близка к функции $y = x$. График данной функции изображен на рисунке 13.

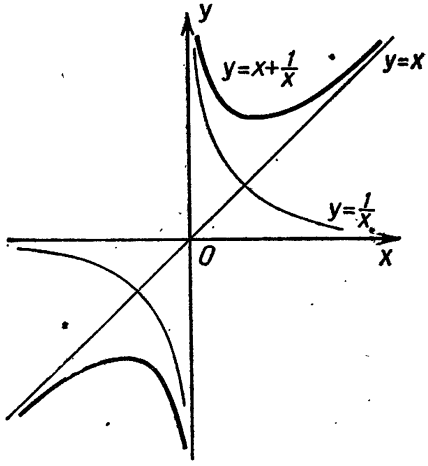



Рис. 12

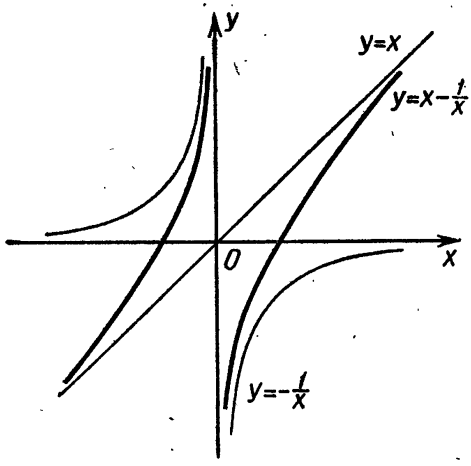



Рис. 13

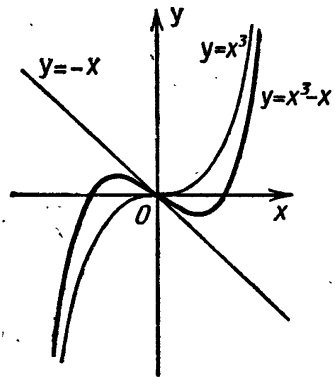



Рис. 14

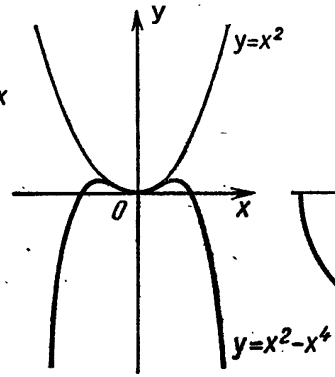



Рис. 15

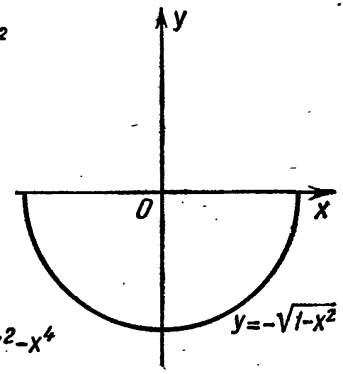



Рис. 16

**118.** Функция нечетная (поскольку сумма или разность двух нечетных функций — функция нечетная). При малых значениях $x$ она близка к $y = -x$, при больших — к $y = x^3$. График этой функции изображен на рисунке 14.

**119.** Функция четная, поскольку разность двух четных функций — четная функция. График ее симметричен относительно оси ординат. При малых значениях $x$ данная функция близка к функции $y = x^2$, при больших — к $y = -x^4$. График ее изображен на рисунке 15.

**120.** Из условия задачи ясно, что значения $y$ должны быть неположительными. Данная функция непрерывна, и уравнение может быть записано так: $x^2 + y^2 = 1$; значит, ее график представляет собой полуокружность с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 16).

**121.** Прежде чем строить график, преобразуем данное выражение:

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

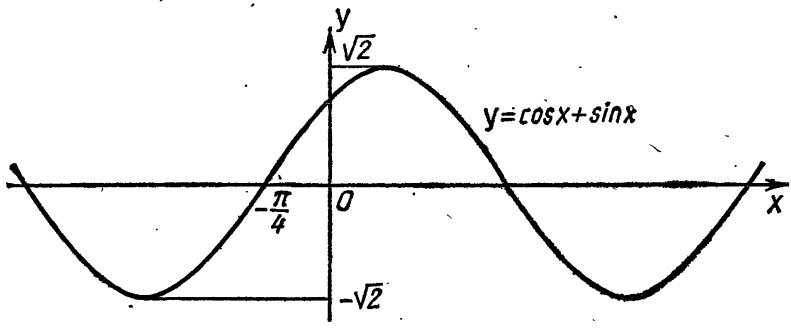



Рис. 17

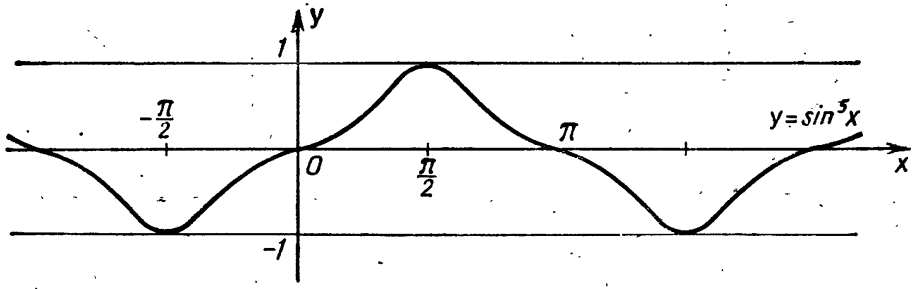



Рис. 18

В результате получаем синусоиду с амплитудой $\sqrt{2}$, сдвинутую по оси абсцисс по сравнению с $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{4}$ влево (рис. 17).

**122.** При значениях $x$, положительных и близких к нулю, значения данной функции оказываются значительно меньше, чем значения функции $y = \sin x$. При значениях $x$, стремящихся к $\frac{\pi}{2}$, значения функции $y = \sin^5 x$ стремятся к 1. Это стремление происходит «более круто», чем для $y = \sin x$ (рис. 18), но тем не менее «острия» при $x = \frac{\pi}{2}$ нет, поскольку $(\sin^5 x)' = 0$.

**123.** В данном случае график более крут в окрестности начала координат и более пологий в окрестности значения $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 19).

**124.** Произведение двух нечетных функций — функция четная. Поэтому $y = x \sin x$ — четная функция. График ее симметричен относительно оси ординат. Замечаем также, что график данной функции находится внутри и на границе части координатной плоскости, представляющей собой совокупность двух прямых углов, вершины которых находятся в начале координат, а стороны наклонены к оси абсцисс под углом 45° (рис. 20). Получившийся график можно рассматривать как результат растяжения синусоиды в направлении оси ординат, причем для каждого значения аргумента $x$ это растяжение пропорционально $x$.

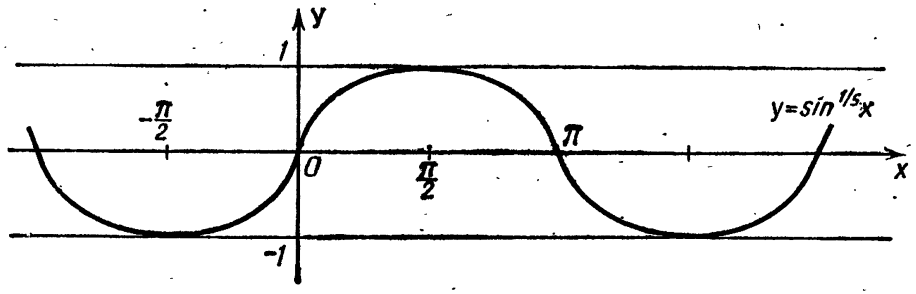



Рис. 19

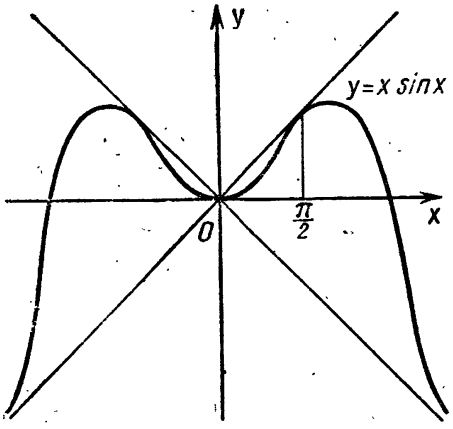



Рис. 20

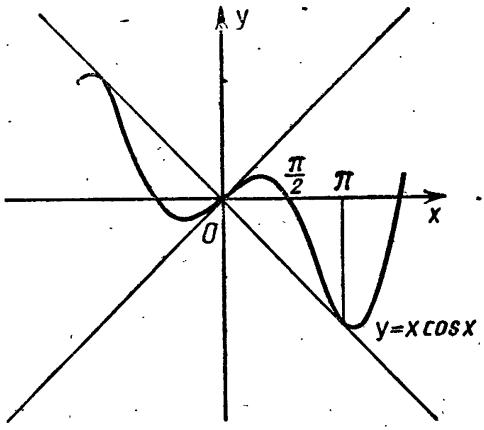



Рис. 21

**125.** Рассматриваемый график аналогичен графику, построенному в предыдущей задаче. Однако здесь функция нечетная (поскольку представляет собой произведение четной функции на нечетную). Поэтому график симметричен относительно начала координат (рис. 21).

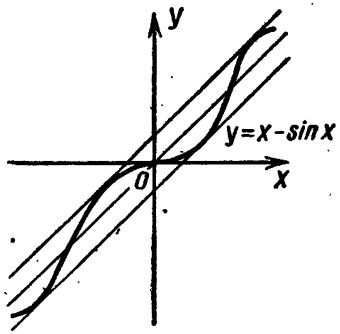



Рис. 22

**126.** Данная функция нечетная, график ее симметричен относительно начала координат. Значения функции находятся внутри и на границе полосы, которая задается двумя параллельными прямыми $y = x - 1$ и $y = x + 1$. Касательные к графику составляют с осью абсцисс острый угол или (в отдельных точках) параллельны ей. Действительно, $y' = 1 - \cos x \geqslant 0$. Нулевые значения производная принимает в точках, где $x = 2k\pi$. График имеет вид, изображенный на рисунке 22.

**127.** Данная функция четная, поскольку является произведением двух четных функций. На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. там, где и синус и косинус положительны, она равняется $\sin 2x$, поэтому на этом промежутке ее график представляет собой полуволну синусоиды, сжатую вдвое вдоль оси абсцисс. На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, где косинус $x$ отрицателен, график представляет две полуволны нашей синусоиды, расположенные снизу от оси абсцисс. Далее, на отрезке оси абсцисс длиной $\pi$ полуволны расположены снова сверху, затем снова снизу (рис. 23). Данная функция оказывается периодической с периодом длиной $2\pi$.

**128.** Данная функция четная, поскольку представляет собой произведение двух нечетных функций. При малых значениях $x$ функция близка к функции $y = x^2$, при больших по модулю значениях $x$ —

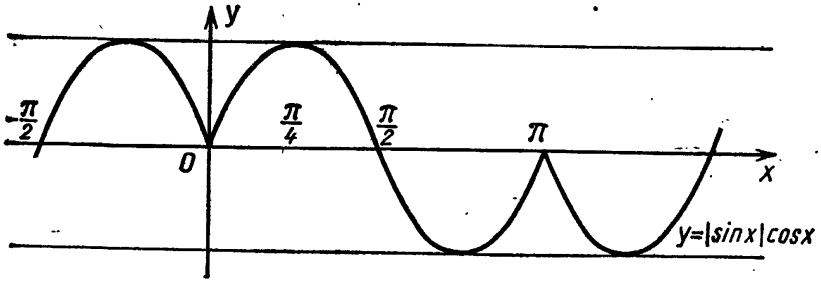



Рис. 23

к прямым $y = \frac{\pi}{2}x$ и $y = -\frac{\pi}{2}x$. График имеет вид, изображенный на рисунке 24.

**129.** Воспользовавшись тем, что $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, запишем данный предел в виде произведения двух пределов: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x} \times$ $\times \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, то данный предел можно записать в виде $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$.

**130.** Преобразуем этот предел к виду

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

**131.** Рассмотрим две функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = \frac{1}{a}x$. Значение корня данного уравнения, если он имеется, определяется точкой пересечения графиков этих функций. Посмотрим, может ли прямая, проходящая через начало координат, касаться графика показательной функции $y_1$ слева от начала координат. Ясно, что нет. В самом деле, если прямая проходит во второй четверти внутри ее, то она пересекает этот график, если — в третьей четверти внутри ее, то она не имеет с графиком показательной функции слева от начала координат общих точек. Наконец, если прямая, о которой идет речь, лежит на границе между второй и третьей четвертями, т. е. расположена по оси абсцисс, то она слева от начала координат имеет общую точку

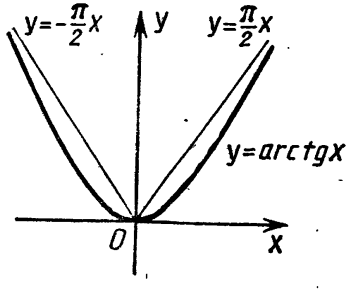



Рис. 24

с графиком показательной функции только в минус бесконечности. Все возможные случаи разобраны и показано, что касание прямой, проходящей через начало координат, с графиком показательной функции возможно только справа от начала координат, т. е. в некоторой точке с абсциссой $x_0 > 0$. Найдем это значение $x$. Должно быть: $y_0 = e^{x_0} \cdot x_0 = e^{x_0}$. Поэтому $x_0 = 1$. Вернемся теперь к данному уравнению. Оно не имеет корней в том случае, если прямая $y_2$, проходящая через начало координат, имеет тангенс угла наклона к оси абсцисс $\frac{1}{a}$ меньше, чем тангенс угла наклона касательной к $e^{x_0}$, т. е. должно быть: $\frac{1}{a} < e$ или $a > \frac{1}{e}$.

**132.** Рассмотрим разность $y_2 - y_1 = 2 \sin x (1 - \cos x) \geqslant 0$. Поэтому в рассматриваемой области везде, кроме $x = 0$, $y_2$ больше, чем $y_1$. При $x = 0$ $y_1 = y_2$.

**133.** Значение $\alpha$ не может быть целым. Графики всех таких функций известны, и ни один из них не имеет такого вида. Замечаем, что, судя по рисунку 4, функция должна быть четной. Это означает, что если число $\alpha$ представить как несократимую дробь, то числитель этой дроби должен выражаться четным числом, а знаменатель — нечетным. Кроме этого, производная в точке $x = 0$, судя по рисунку, должна обращаться в бесконечность. А это возможно только при $\alpha < 1$.

**134.** Прежде чем вычислять производную, несколько преобразуем правую часть данного равенства:

$$f(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} + x.$$

Теперь продифференцируем: $f'(x) = -\frac{2}{2} \sin 2x \cos 2x + 1 = 1$, откуда $\sin 4x = 0$. Поэтому $x = \frac{\pi}{4} k$.

**135.** Известно, что $f(t) = t + \frac{1}{t}$ $(t > 0)$ принимает наименьшее значение при $t = \frac{1}{t} = 1$ и равно $f(1) = 2$. Так и в нашем случае, минимальное значение $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ достигается при $e^x = e^{-x}$, т. е. при $x = 0$, и равно единице. Касательная к графику функции параллельна в тех точках, где достигается максимум или минимум. Поэтому в нашем случае такой касательной служит прямая $y = 1$. Дифференцируя данную функцию и приравнивая результат нулю, можно убедиться, что других касательных, параллельных оси абсцисс, она не имеет.

**136.** Касательная к данной кривой $y = e^x$ записывается так: $y - y_0 = e^{x_0}(x - x_0)$. В данном случае $e^{x_0} = 1$ и, значит, $x_0 = 0$. Поэтому $y_0 = e^0 = 1$. Искомая точка (0; 1).

**137.** Если сумма коэффициентов многочлена при $x$ в четных степенях равна сумме его коэффициентов при нечетных степенях, то $x = -1$ является корнем данного многочлена.

Действительно, если данный многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, то, подставляя значение $x = -1$, получаем:

$$P_n(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + (-1)^n a_n = 0,$$
$$P_n(-1) = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_n - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) = 0,$$

если $n$ — четное натуральное число;

$$P_n(-1) = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{n-1} - (a_1 + a_3 + \ldots + a_n) = 0,$$

если $n$ — нечетное натуральное число.

**138.** Перепишем данный многочлен в другой форме:

$$n(x^{n+1} - x^n) - (x^n - 1) = nx^n(x - 1) - (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) =$$
$$= (x - 1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1) =$$
$$= (x - 1)((x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + (x^n - x^{n-3}) + \ldots + (x^n - 1)) =$$
$$= (x-1)(x^{n-1}(x-1) + x^{n-2}(x^2-1) + x^{n-3}(x^3-1) + \ldots + 1 \cdot (x^n-1)) =$$
$$= (x - 1)^2(x^{n-1} + x^{n-2}(x+1) + x^{n-3}(x^2 + x + 1) + x^{n-4}(x^3 + x^2 + x + 1) + \ldots + 1 \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1) =$$
$$= (x-1)^2(nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1).$$

Таким образом, частное от деления равно $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

Если бы нам требовалось установить только делимость данного многочлена на $(x - 1)^2$, то достаточно было бы заметить, что $(x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + (x^n - x^{n-3}) + \ldots + (x^n - 1)$ при $x = 1$ обращается в нуль. Следовательно, этот многочлен имеет корень $x = 1$ и делится на $x - 1$. Значит, данный многочлен делится на $(x - 1)^2$.

**139.** Имеем: $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Частное от деления этого многочлена на $x - a$ есть многочлен $Q_{n-1}(x)$ $(n - 1)$-го порядка, причем $P_n(x) \equiv Q_{n-1}(x)(x - a) + c$. Получили тождество, справедливое для всех значений $x$, в том числе для $x = a$. Подставляя в него $x = a$, получаем, что $c = P_n(a)$, поскольку первое слагаемое в правой части обращается в нуль.

**140.** а) Нетрудно показать, что многочлен $y_1$ принимать только отрицательные значения при всех возможных значениях $x$ не может. Действительно, при $x = 0$, $y(0) = 1 > 0$ при всех значениях $\lambda > 0$.

Для того чтобы $y_1$ принимал только положительные значения, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\lambda - 1)^2 - 4\lambda < 0, \text{ или } \lambda^2 - 6\lambda + 1 < 0,$$
$$\text{т. е. } 3 - 2\sqrt{2} < \lambda < 3 + 2\sqrt{2}.$$

б) $y_2(0) = -1$. Значит, ни при каких значениях $\lambda$ многочлен

$y_2$ не принимает только положительные значения при всех значениях $x$. Чтобы многочлен сохранял отрицательное значение для всех значений $x$, должно выполняться неравенство $(\lambda - 1)^2 + 4\lambda < 0$. А это при $\lambda > 0$ невозможно.

**141.** $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$,
$Q_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$.

Эта запись показывает, что в первом случае наивысший порядок коэффициента многочлена, не равного 0, равен $n$, во втором — $m$. Подставляя $x = 1$, получаем, что $P_n(1)$ и $Q_m(1)$ представляют собой суммы коэффициентов соответствующих данных многочленов. Ясно, что, перемножая эти многочлены, мы получаем многочлен, сумму коэффициентов которого также можно получить, подставляя $x = 1$. Отсюда и следует справедливость высказанного в условии задачи утверждения.

**142.** Если $2x^3 - x^2y - xy^2 - 3y^3$ делится без остатка на $2x - 3y$, то в частном получается многочлен вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $a$, $b$ и $c$ — некоторые постоянные. Действительно, в результате перемножения этих двух многочленов с двумя переменными получим $x^3$, $x^2y$, $xy^2$, $y^3$ с некоторыми постоянными коэффициентами. Выполним умножение:

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(2x - 3y) =$$
$$= 2ax^3 + 2bx^2y + 2cxy^2 - 3ax^2y - 3bxy^2 - 3cy^3 =$$
$$= 2ax^3 + x^2y(2b - 3a) + xy^2(2c - 3b) - 3cy^3.$$

Полученное произведение тождественно равно $2x^3 - x^2y - xy^2 - 3y^3$ тогда, когда $a = 1$, $2b - 3a = -1$, $2c - 3b = -1$, $c = 1$, откуда $b = 1$.

Таким образом, мы разделили $2x^3 - x^2y - xy^2 - 3y^2$ на $2x - 3y$ и получили в частном $x^2 + xy + y^2$.

Проводя аналогичные рассуждения для многочлена $4x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3$, получаем:

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(2x - 3y) =$$
$$= 4x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3 =$$
$$= 2ax^3 + x^2y(2b - 3a) + xy^2(2c - 3b) - 3cy^3.$$

Следовательно, должно быть: $a = 2$, $2b - 6 = 1$, откуда $b = \frac{7}{2}$, $2c - 3b = 1$. Значит, с одной стороны, должно быть: $c = \frac{23}{4}$, но, с другой стороны, должно быть справедливо равенство $c = 1$, поскольку $-3c = -3$. Получили противоречие. Значит, многочлен $4x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3$ разделить без остатка на $2x - 3y$ нельзя.

Многочлен $x^2 + xy + y^2$ на множители не разлагается, потому что не разлагается на множители выражение $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1$ (оно не имеет действительных корней, т. е. значений $\frac{x}{y}$, обращающих $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1$ в нуль). Поэтому единственный общий делитель,

который может быть у многочленов $2x^3 - x^2y - xy^2 - 3y^3$ и $4x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3$, представляет собой многочлен двух переменных $x^2 + xy + y^2$.

Посмотрим, удастся ли нам найти такие значения $a$ и $b$, чтобы удовлетворялось тождество

$$(x^2 + xy + y^2)(ax + by) = 4x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3.$$

Левая часть равна

$$ax^3 + x^2y(b + a) + xy^2(b + a) + by^3.$$

Имеем: $a = 4$, $b + a = 1$, откуда $b = -3$. При этих значениях $a$ и $b$ коэффициенты при $xy^2$ и $y^3$ действительно равны 1 и $-3$. Окончательно находим:

$$4x^3 + x^2y + xy^2 - 3y^3 = (x^2 + xy + y^2)(4x - 3y).$$

Замечание. Можно было бы, конечно, выполнить деление данного первого многочлена на $2x - 3y$ посредством построения и группировки таких слагаемых, из которых каждый делился бы на $2x - 3y$ без остатка:

$$\begin{gathered}(2x^3 - 3x^2y) + (2x^2y - 3xy^2) + (2xy^2 - 3y^3) = \\ = x^2(2x - 3y) + xy(2x - 3y) + y^2(2x - 3y) = \\ = (2x - 3y)(x^2 + xy + y^2).\end{gathered}$$

Аналогичное деление на $2x - 3y$ второго многочлена приводит к ненулевому остатку:

$$\begin{gathered}(4x^3 - 6x^2y) + \left(7x^2y - \frac{21}{2}xy^2\right) + \left(\frac{23}{2}xy^2 - \frac{69}{4}y^3\right) + \frac{57}{4}y^3 = \\ = (2x - 3y)\left(2x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{23}{4}y^2\right) + \frac{57}{4}y^3.\end{gathered}$$

Здесь $\frac{57}{4}y^3$ — остаток от деления, множитель во вторых скобках — частное.

**143.** Представим данное уравнение так: $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$ или $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} + 3$, откуда видно, что $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{1}{3}$.

**144.** Левая часть уравнения симметрична относительно $a$, $b$ и $c$. Замечаем, что $\frac{a + b + c - a}{b + c} = 1$. Поэтому возникает догадка, что корень $x$ равен $a + b + c$. Действительно, $\frac{a + b + c - b}{a + c} = \frac{a + b + c - c}{a + b} = 1$. Догадка оказалась правильной: $x = a + b + c$.

**145.** Перенесем в правую часть $\frac{a}{b + c}$, $\frac{b}{a + c}$, $\frac{c}{a + b}$, делим обе части уравнения на коэффициент при $x$. Получаем:

$$x = \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b}\right)^{-1}\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b}\right).$$

Ясно, что для существования решения необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\neq 0$.

**146.** Преобразуем подкоренные выражения:

$$x-2\sqrt{x-1}=(x-1)-2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}-1)^2,$$

$$x+3-4\sqrt{x-1}=(x-1)-4\sqrt{x-1}+4=(\sqrt{x-1}-2)^2.$$

Таким образом, данное уравнение оказалось преобразованным к виду $|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}-2|=1$.

По определению $\sqrt{x-1}\geqslant 0$. Имеем: $0\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 1$ при $1\leqslant x\leqslant 2$; $1<\sqrt{x-1}\leqslant 2$ при $2<x\leqslant 5$; $\sqrt{x-1}>2$ при $x>5$. Разобьем область возможных значений $x$ на три участка $[1;\ 2]$, $]2;\ 5[$, $[5;\ \infty[$.

На первом участке данное уравнение принимает вид: $-\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+2=1$, откуда $\sqrt{x-1}=1$ и $x=2$.

На втором участке получаем: $\sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}+2=1$, $0=0$, т. е. уравнение удовлетворяется при любом значении $x$.

Наконец, на третьем рассматриваемом участке имеем:

$$\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}-2=1,\ \text{откуда}\ 2\sqrt{x-1}=4,\ x=5.$$

**147.** Догадка о значении корня может возникнуть так: из $x$ вычитаем $a^2$ и получаем величину, из которой извлекается нацело квадратный корень и в результате получается $b$. Значит, $x=a^2+b^2$. Проверка показывает, что это действительно корень уравнения.

**148.** Представим уравнение в виде $\frac{ax^{-1}+1}{ax^{-1}-1}=\frac{ab+1}{ab-1}$. Теперь нетрудно догадаться, что $x^{-1}=b$, или $x=\frac{1}{b}$. Других корней нет, поскольку уравнение сводится к линейному.

**149.** Сколько может быть различных корней у этого уравнения? Две параболы $y=x^2$ и $y=(x-2)^2$ отличаются тем, что вторая сдвинута относительно первой вправо на две единицы. Поэтому у них только одна общая точка и, следовательно, у данного уравнения один корень. О значении этого корня догадаться нетрудно: $x=1$.

**150.** Свободный член уравнения имеет вид: $cd-ab$. Слева у $x$ в первой степени коэффициент $a+b$, справа $c+d$. Отсюда следует, что $x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$.

**151.** Введем первую замену переменной, чтобы получить выражение, симметричное относительно неизвестной величины. Примем $x+2=y$. Тогда получим:

$$\frac{1}{y-2}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}=0.$$

Хотя это выражение и симметрично, привести его к такому виду, чтобы решение свелось к решению квадратного уравнения, все еще затруднительно. Поэтому выполним еще одну замену: $y = \frac{1}{t}$. В результате получаем:

$$\frac{1}{\frac{1}{t}-2} + \frac{1}{\frac{1}{t}-1} + t + \frac{1}{\frac{1}{t}+2} + \frac{1}{\frac{1}{t}+1} = 0.$$

Так как $t \neq 0$, то приходим к уравнению

$$\frac{1}{1-2t} + \frac{1}{1+2t} + 1 + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} = 0.$$

Решение этого уравнения уже легче свести к решению квадратного уравнения. Имеем:

$$\frac{2}{1-4t^2} + \frac{2}{1-t^2} + 1 = 0, \text{ или } \frac{2}{1-4t^2} + \frac{8}{3+(1-4t^2)} + 1 = 0.$$

Выполним третью замену: $1 - 4t^2 = u$. Тогда $\frac{2}{u} + \frac{8}{3+u} + 1 = 0$. Последнее уравнение приводится к квадратному: $u^2 + 13u + 6 = 0$. Откуда должно быть: $u_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{145}}{2}$.

Далее получаем:

1) $t^2 = \frac{15+\sqrt{145}}{8}$, $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{2}}$, $t_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{2}}$;

2) $t^2 = \frac{15-\sqrt{145}}{8}$, $t_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{2}}$, $t_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{2}}$.

Откуда $y_1 = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}$, $y_2 = -\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}$,

$y_3 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}$, $y_4 = -\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}$. Переходя к $x$, получаем:

$x_1 = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2$, $x_2 = -\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2$,

$x_3 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2$, $x_4 = -\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2$.

**152.** Преобразуем данное уравнение к виду

$$\left(\frac{x-1}{x+2}+1\right) - \left(\frac{x-2}{x+3}+1\right) = \left(\frac{x-4}{x+5}+1\right) - \left(\frac{x-5}{x+6}+1\right).$$

Выполняя указанные в скобках действия, получаем:

$$(2x+1)\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)=0 \text{ и } x_1=-\frac{1}{2}.$$

Вот когда выясняется смысл проделанного выше преобразования данного уравнения. Сгруппировав в уравнении $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}=0$ первое слагаемое со вторым, а третье с четвертым, преобразуем его к виду

$$\frac{1}{x^2+8x+12}-\frac{1}{x^2+8x+15}=0.$$

Обозначим: $x^2+8x+12=y$. Тогда данное уравнение принимает вид: $\frac{1}{y}-\frac{1}{y+3}=0$ или $y+3-y=0$. Получаем противоречивое равенство $3=0$. Следовательно, других корней данное уравнение не имеет.

**153.** Разобьем ось абсцисс на следующие четыре участка: $]-\infty;\ 1]$, $]1;\ 2]$, $]2;\ 3]$, $]3;\ \infty[$.

Если $x\in\,]-\infty;\ 1]$, то $|x-1|=-x+1$; $|x-2|=-x+2$; $|x-3|=-x+3$ и уравнение принимает вид: $-x+1+2x-4-3x+9=4$, $-2x+6=4$, $x=1$.

Если $x\in\,]1;\ 2]$, то $x-1+2x-4-3x+9=4$, $4=4$. Значит, любое значение $x$ из указанного промежутка является корнем уравнения.

Если $x\in\,]2;\ 3]$, то $x-1-2x+4-3x+9=4$, $-4x+12=4$, $x=2$, но это значение в рассматриваемую область не входит.

Если $x\in\,]3;\ \infty[$, то $x-1-2x+4+3x-9=4$, $2x-6=4$, $x=5$.

Итак, корнями уравнения являются $1\leqslant x\leqslant 2$ и $x=5$.

**154.** Нетрудно заметить, что $x=1$ является корнем уравнения. Покажем, что других корней нет. Для этого достаточно убедиться, что левая часть уравнения с возрастанием $x>1$ также возрастает. Но это действительно так, потому что с возрастанием $x$ каждое из слагаемых возрастает.

**155.** Видно, что значение $x=0$ удовлетворяет данному уравнению. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$ и возьмем от нее производную $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$. Все слагаемые в правой части производной положительны при всех допустимых значениях $x$. Значит, при любых значениях $x$ $f'(x)>0$. Поэтому $f(x)$ может равняться нулю (а данное уравнение иметь соответственно корень) только при одном значении $x$ и это значение равно нулю.

**156.** Имеем: $3(x+y+z+u)=a+b+c+d$, или $x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{3}$.

Вычитая из этого уравнения последовательно каждое из уравнений данной системы, получаем:

$$u=\frac{-2a+b+c+d}{3},\quad x=\frac{a-2b+c+d}{3},$$
$$y=\frac{a+b-2c+d}{3},\quad z=\frac{a+b+c-2d}{3}.$$

**157.** Сложим все уравнения и из суммы вычтем удвоенное каждое из данных уравнений. В результате получим новую систему уравнений

$$\begin{cases} yz=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2}, \\ xz=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2}, \\ xy=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}. \end{cases}$$

Перемножая правые части уравнений, входящих в эту систему, получим, чему равняется $x^2y^2z^2$. Извлекая из этого произведения квадратный корень, найдем значение $xyz$. Поделив полученный результат на значения $yz$, $xz$ и $xy$, найдем последовательно значения $x$, $y$ и $z$. Получим:

$$x=\pm\sqrt{\frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(-a^2+b^2+c^2)}};$$
$$y=\pm\sqrt{\frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{2(a^2-b^2+c^2)}};$$
$$z=\pm\sqrt{\frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{2(a^2+b^2-c^2)}}.$$

**158.** Пытаясь разложить сумму $x+y+xy$ на множители, замечаем, что недостает одного слагаемого, а именно единицы: $1+x+y+xy=(1+x)(1+y)$. Прибавим к обеим частям данных уравнений по 1, получим новую систему уравнений относительно переменных $x_1=1+x$, $x_2=1+y$, $x_3=1+z$:

$$\begin{cases} x_1x_2=a^2+1, \\ x_1x_3=b^2+1, \\ x_2x_3=c^2+1. \end{cases}$$

Чтобы найти корни этой системы, перемножим уравнения и извлечем из обеих частей квадратный корень. Дальше, используя деление, как в предыдущей задаче, найдем:

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}};\quad x_2=\pm\sqrt{\frac{(a^2+1)(c^2+1)}{b^2+1}};$$
$$x_3=\pm\sqrt{\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{a^2+1}}.$$

Теперь найдем корни данной системы:

$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}};\quad y = -1 \pm \sqrt{\frac{(a^2+1)(c^2+1)}{b^2+1}};$$

$$z = -1 \pm \sqrt{\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{a^2+1}}.$$

**159.** Левую часть неравенства представим в виде

$$N^{N+1} = N \cdot N^N = \underbrace{N^N + N^N + \ldots + N^N}_{N \text{ слагаемых}}.$$

Правую часть неравенства можно представить в виде $N - 1$ слагаемых, два из которых равны $N^N$, а остальные меньше, чем $N^N$, и слагаемого $N + 1$, которое при $N > 2$ меньше $N^N$. В самом деле, $N^N > N^2 = N \cdot N > 2N = N + N > N + 1$.

Покажем теперь справедливость утверждения, высказанного выше:

$$(N+1)^N = \underbrace{(N+1)(N+1)\ldots(N+1)}_{N \text{ пар скобок}}.$$

Представим произведение в правой части в виде суммы. Для этого выполним умножение. Из каждой скобки возьмем в качестве множителя $N$. Получим первое слагаемое суммы $(N+1)^N$. Оно равно $N^N$. Теперь возьмем из первой скобки множитель 1, из остальных — множитель $N$, получим $N^{N-1}$, затем из второй скобки — множитель 1, из остальных — по $N$, получим $N^{N-1}$. Продолжая этот процесс, получим $N$ таких слагаемых. Их сумма равна $N \cdot N^{N-1} = N^N$. Третье слагаемое получим, беря поочередно из двух скобок по 1, из остальных — по $N$. Это слагаемое будет иметь вид: $kN^{N-2}$, где $k$ — какой-то целый положительный коэффициент. Выясним, будет $k$ больше или меньше, чем $N^2$. Если $k < N^2$, то слагаемое $kN^{N-2} < N^N$. Оно действительно меньше. Сколькими способами можно из $N$ сомножителей-двучленов выбрать две единицы? Первую — $N$ способами, а вторую — меньшим числом способов, потому что одна единица уже выбрана. Поэтому $k < N^2$. Точно так же, если при умножении из трех скобок брать по единице, то число слагаемых будет меньше, чем $N^3$, а каждое из этих слагаемых равно $N^{N-3}$. Поэтому в сумме получим число, меньшее $N^{N-3} \cdot N^3 = N^N$. Продолжая рассуждения дальше, получим нужный результат.

**160.** Пусть производительность первой линии — $n_1$ единиц продукции в час, второй — $n_2$, третьей — $n_3$. Каждая из линий работает по $T$ часов в сутки.

Из условия задачи получаем систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} (n_2 + n_3)\left(T - 4\frac{4}{5}\right) = n_1 T, \\ n_2 (T - 2) = n_1 T, \\ n_3 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2). \end{cases}$$

Число неизвестных в этой системе можно уменьшить до трех, поделив каждое уравнение на $n_1$. Тогда получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными $T$, $\frac{n_2}{n_1}$ и $\frac{n_3}{n_1}$:

$$\begin{cases} \left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_3}{n_1}\right)\left(T-4\frac{4}{5}\right)=T, \\ \frac{n_2}{n_1}T-2\frac{n_2}{n_1}=T, \\ \frac{n_3}{n_1}=\frac{1}{2}\frac{n_2}{n_1}+\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теперь исключим с помощью третьего уравнения системы из первого уравнения $\frac{n_3}{n_1}$, затем с помощью второго уравнения из первого — $\frac{n_2}{n_1}$. Получаем квадратное уравнение относительно $T$: $5T^2-43T+24=0$. Решая его, находим значение $T=8$ (отрицательный корень не удовлетворяет смыслу задачи). И, подставляя его во второе уравнение, находим: $\frac{n_2}{n_1}=\frac{4}{3}$. Зная $\frac{n_2}{n_1}$, из третьего уравнения находим: $\frac{n_3}{n_1}=\frac{7}{6}$. Наконец, разделив $\frac{n_3}{n_1}$ на $\frac{n_2}{n_1}$, находим: $\frac{n_3}{n_2}=\frac{7}{8}$, что и требовалось.

**161.** Должно быть: $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1$. Полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -1\leqslant\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}, \\ \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\leqslant 1. \end{cases}$$

Решая их, находим: $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{5}$ или $x\geqslant\frac{5}{2}$.

**162.** Преобразуем данное выражение к виду

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right).$$

Примем, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. Это можно сделать, поскольку $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1$. Тогда $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$. Действительно, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$. Следовательно, данное выражение преобразовывается к виду $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$. Максимальное значение этого выражения $\sqrt{a^2+b^2}$, минимальное $-\sqrt{a^2+b^2}$.

**163.** Замечаем, что $y$ не может быть отрицательным, так как в правой части содержатся четные степени с неотрицательными коэффициентами. Поэтому если $y$ может быть нулем, то это и будет

его наименьшим значением. Нетрудно заметить, что, например, при $x = 0$ правая часть обращается в нуль.

Для того чтобы отыскать наибольшее значение функции, преобразуем правую часть:

$$y = \frac{\sin^2 2x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 2x}{1 - \frac{\sin^2 2x}{2}} = -2 + \frac{4}{2 - \sin^2 2x}.$$

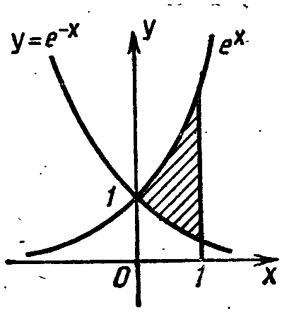


Рис. 25

Наибольшее значение последнего выражения достигается при $\sin 2x = \pm 1$ и равно $-2 + 4 = 2$.

Итак, наименьшее значение $y$ равно 0, наибольшее 2.

**164.** Находим: $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$. Поэтому $x(3x^2 \ln x + x^2) = 2x^3 \ln x$, или так как $x \neq 0$ $3 \ln x + 1 = 2 \ln x$, $\ln x = -1$, $x = e^{-1}$.

**165.** Площадь фигуры, о которой говорится в условии задачи, заштрихована на рисунке 25. Ее можно вычислить как разность двух интегралов: $\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^{-x} dx = e^x \Big|_0^1 + e^{-x} \Big|_0^1 = e^1 + e^{-1} - 2$.

**166.** Для удобства запишем данную функцию иначе: $y = 1 + \sin 2x$. Первообразная от этой функции равна $x - \frac{\cos 2x}{2} + C$, где $C$ — произвольная постоянная. Подставляя вместо $x$ его значение в данной точке, т. е. 0, получаем: $-\frac{1}{2} + C = 1$. Откуда $C = \frac{3}{2}$. Стало быть, искомая первообразная равна $x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}$.

**167.** Преобразуем вначале подынтегральное выражение:

$$\int_0^x \frac{1 + \cos 2xu}{2} du = \int_0^x \frac{du}{2} + \int_0^x \frac{1}{2} \cos(2xu)\, du.$$

Перейдем теперь к новой переменной $v = 2xu$. Если $u = 0$, то $v = 0$. Если $u = x$, то $v = 2x^2$. Кроме того, $du = \frac{dv}{2x}$. Поэтому искомый интеграл равен

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4x} \int_0^{2x^2} \cos v dv = \frac{x}{2} + \frac{1}{4x} \sin 2x^2.$$

Из данного уравнения получаем: $\sin 2x^2 = 1$, откуда искомое значение $x$ равно $\pm \sqrt{\frac{4k+1}{4}\pi} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4k+1)\pi}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

**168.** График зависимости $y = |x - a|$ представляет собой совокупность двух лучей, проведенных в полуплоскости $y \geqslant 0$ из точки с координатами $(a; 0)$ один под углом $\frac{\pi}{4}$ к положительному направлению от абсцисс, другой под углом $\frac{3\pi}{4}$ к тому же направлению (для случая $a = 0$ такой график строился в задаче 70, а) настоящего раздела).

Интеграл $\int_0^x |t - a|\, dt$ геометрически выражает собой площадь фигуры, «верхняя» граница которой — график $y = |x - a|$, «левая» граница — прямая $x = 0$, «правая» граница — прямая, параллельная оси ординат и находящаяся от нее на расстоянии $x$ в полуплоскости $x \geqslant 0$. «Нижняя» граница — отрезок $[0; x]$ оси абсцисс. Если точка $a$ располагается вне отрезка $[0; x]$, то такая фигура представляет собой трапецию. Если точка $a$ попадает в концы этого отрезка, то трапеция вырождается в равнобедренный прямоугольный треугольник, имеющий отрезок $[0; x]$ катетом. Геометрически ясно, что площадь трапеции максимума не имеет и становится минимальной, когда трапеция вырождается в треугольник. В этом случае площадь рассматриваемой фигуры равна $\frac{x^2}{2}$.

Если $a$ — положительное число, меньшее $x$, то рассматриваемая фигура представляет собой объединение двух прямоугольных равнобедренных треугольников с катетами $a$ и $x - a$. Суммарная их площадь составляет $\frac{a^2}{2} + \frac{(x-a)^2}{2}$. В качестве постоянной величины в последнем выражении рассматриваем $x$, а в качестве переменной $a$. Дифференцируя это выражение по $a$ и приравнивая результат нулю, из получившейся формулы находим, при каком значении $a$ достигается наименьшее его значение: $2a + (x - a)(-2) = 0$ и $a = \frac{x}{2}$. Следовательно, в данном случае минимальное значение площади рассматриваемой фигуры достигается при $a = \frac{x}{2}$ и оно равно $\int_0^x |t - a|\, dt =$

$$= -\int_0^{\frac{x}{2}} (t - a)\, dt + \int_0^{\frac{x}{2}} (t - a)\, dt = \frac{x^2}{2}.$$

Это значение минимально для любой из рассматриваемых фигур.

**169.** Подставляя последовательно в первое уравнение значение $y$, выраженное через $z$, из второго уравнения системы, а затем значение $z$, выраженное через $x$, из третьего уравнения, получаем: $x + \cfrac{1}{10 - \cfrac{1}{10 - \cfrac{1}{x}}} =$

$=10$. Это уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2 - 10x + 1 = 0$. Решая его, находим: $x_1 = 5 - \sqrt{24}$ и $x_2 = 5 + \sqrt{24}$. Вследствие симметрии данной системы корни $y_1$ и $y_2$, $z_1$ и $z_2$ имеют такие же значения. Нерешенным остается только вопрос о том, в каком порядке их объединять в тройки, чтобы получить ответ.

Видим, что $\frac{1}{5-\sqrt{24}} + 5 - \sqrt{24} = 5 + \sqrt{24} + 5 - \sqrt{24} = 10$, $\frac{1}{5+\sqrt{24}} + 5 + \sqrt{24} = 10$, $\frac{1}{5-\sqrt{24}} + 5 + \sqrt{24} \neq 10$ и $\frac{1}{5+\sqrt{24}} + 5 - \sqrt{24} \neq 10$.

Следовательно, имеем два решения:

$x_1 = y_1 = z_1 = 5 - \sqrt{24}$; $x_2 = y_2 = z_2 = 5 + \sqrt{24}$.

## II. ПЛАНИМЕТРИЯ

### 7 класс

**1.** Каждая точка плоскости окрашена в один из четырех цветов. Любой из этих цветов используется хотя бы один раз. Доказать, что на плоскости найдется хотя бы одна прямая, точки которой окрашены не менее чем в три цвета.

**2.** Могут ли у четырехугольника на плоскости быть параллельные диагонали?

**3.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ взята произвольно точка $D$. Проведем отрезок $BD$. Показать, что $AB + BC$ не превышает $2BD + AC$.

**4.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ тупой. Отсечь с помощью прямой от треугольника $ABC$ треугольник, две стороны и угол которого равнялись бы двум сторонам и углу данного треугольника. Возможно ли выполнить такую операцию?

**5.** Разрезать отрезками прямых произвольный остроугольный треугольник $ABC$ на такие три части, из которых можно было бы составить треугольник, не равный треугольнику $ABC$, но с углами, равными его углам, и сторонами, равными его сторонам.

**6.** В треугольнике $ABC$ боковые стороны $AB$ и $AC$ равны. Показать, что сумма расстояний от произвольной точки $D$ на его основании $BC$ до боковых сторон — величина постоянная.

**7.** В параллелограмме $ABCD$ из вершины $A$ проведен луч, пересекающий диагональ $BD$ в точке $E$ такой, что $\frac{BE}{ED} = k < 1$. В каком отношении луч делит сторону $BC$ данного параллелограмма ($BC > AB$)?

**8.** Доказать, что если у треугольника две биссектрисы равны, то треугольник этот равнобедренный (задача Штейнера — Лемуса).

**9.** Если в равнобедренном треугольнике хотя бы один из углов равен 60°, то этот треугольник равносторонний. Доказать.

**10.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ углы $A$ и $C$ равны 40°. Из вершины $A$ внутренним образом проведен отрезок $AD$ под углом 20° к основанию треугольника $AC$, из вершины $C$ проведен отрезок прямой $CD$ под углом 30° к основанию. Точки $B$ и $D$ соединены отрезком прямой. Определить, используя вспомогательные геометрические построения, величину угла $CBD$.

**11.** В треугольнике $ABC$ $AB = BC$ и каждый из углов $A$ и $C$ равен 50°. Из точки $C$ под углом 30° к основанию $AC$ проведены внешним образом отрезки $CD$ и $AD$. Угол $CBD$ равен 20°. Найти угол $CAD$.

**12.** Внутри равностороннего треугольника $ABC$ возьмем произ-

вольно точку $O$. Соединим ее отрезками прямых с вершинами $A$, $B$ и $C$. Пусть отрезок $OB$ является стороной равностороннего треугольника $OBD$, причем точки $A$ и $D$ находятся по разные стороны от прямой $OB$. Соединяем отрезком точки $C$ и $D$. Доказать, что отрезок $CD$ равен отрезку $OA$.

**13.** На треугольнике указать линии сгиба, перегнув по которым можно совместить все три его вершины на одной из сторон.

**14.** Внешней биссектрисой треугольника называется биссектриса угла, дополняющего угол треугольника до развернутого.

На внешние биссектрисы углов $ABC$ и $ACB$ треугольника $ABC$ из его вершины $A$ опущены перпендикуляры $AM$ и $AN$. Точки $M$ и $N$ соединены отрезком прямой. Доказать, что длина отрезка $MN$ равна половине периметра треугольника $ABC$.

**15.** Вписать квадрат в параллелограмм, считая известным, что центры симметрии этих фигур совпадают.

**16.** Переплетчик, желая проверить, правильно ли вырезан из картона квадрат, убеждается в том, что все его стороны прямолинейны и равны. Что еще надо измерить, если нет угломера и картон перегибать нельзя

**17.** Может ли сторона ромба равняться его диагонали? половине его диагонали?

**18.** Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, также образуют квадрат.

**19.** Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Пифагора, считая прямую теорему Пифагора доказанной.

**20.** Известны координаты двух вершин равностороннего треугольника $ABC$: $A$ (0; 0), $B$ (1; 1). Найти координаты третьей вершины $C$.

**21.** Показать, что $x^2 + y^2 = 2x$ — есть уравнение окружности.

**22.** Точка $P$ расположена внутри прямоугольника $ABCD$. Ее расстояния до вершин $A$, $B$ и $C$ равны соответственно $a$, $b$ и $c$. Найти расстояние от точки $P$ до вершины $D$.

**23.** Внутри произвольного треугольника $ABC$ берется точка $D$ и соединяется отрезками прямых с его вершинами. Доказать, что если построить треугольник со сторонами, параллельными отрезкам $AD$, $BD$ и $CD$, и через его вершины провести прямые, параллельные сторонам треугольника $ABC$, то эти прямые пересекутся в одной точке (задача Максвелла).

**24.** На плоскости даны три параллельные прямые. Расстояние от верхней прямой до средней равно $a$, от средней до нижней — $b$. На каждой из этих прямых находится одна из вершин равностороннего треугольника. Вычислить сторону этого треугольника.

**25.** На плоскости даны три параллельные прямые и треугольник со сторонами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Расстояние от верхней прямой до средней равно $a$, расстояние от средней до нижней равно $b$. Вершины треугольника, подобного данному, находятся на данных прямых. Найти его стороны.

**26.** Доказать, что в любом треугольнике сумма высот меньше суммы длин его сторон.

**27.** Доказать, что периметр остроугольного треугольника, вписанного в окружность, по крайней мере вдвое больше диаметра этой окружности.

**28.** Около треугольника описана окружность. На окружности отмечены середины дуг, определяемых его вершинами. После этого треугольник стерт, а окружность и середины дуг оставлены. Восстановить треугольник.

**29.** Каждая из вершин некоторого треугольника соединена отрезком с произвольной внутренней точкой противоположной стороны треугольника. Доказать, что середины полученных отрезков не лежат на одной прямой.

**30.** Пусть $ABC$ — произвольный треугольник, $P$ — произвольная точка плоскости, не совпадающая с его вершинами. Проведем прямые $AP$, $BP$ и $CP$. На прямой $AP$ возьмем точку $K$ такую, чтобы точки $A$ и $K$ лежали по разные стороны от точки $P$ и $AP = PK$. Аналогично на прямой $BP$ возьмем точку $S$, а на прямой $CP$ — точку $T$. Доказать, что треугольники $ABC$ и $KST$ равны.

**31.** Дуга окружности $AB$ разделена точками $C$ и $D$ на три равные части. Из центра окружности $O$ проведены отрезки $OC$ и $OD$, пересекающие хорду $AB$ соответственно в точках $E$ и $F$. Доказать, что $EF < BF$.

**32.** Из точки $E$, расположенной вне окружности, проведены две секущие. Первая из них пересекает данную окружность в точках $A$ и $B$, вторая — в точках $C$ и $D$. $ET$ — касательная, где $T$ — точка касания. Доказать, что $ET^2 = AE \cdot BE = EC \cdot ED$.

**33.** В некоторый угол вписаны три круга, не имеющие общих точек, кроме точек касания. Средний круг касается двух крайних. Радиусы крайних кругов равны $r$ и $R$. Найти радиус среднего круга.

**34.** Две окружности расположены одна вне другой. Из центра $O_1$ первой окружности проведены две касательные ко второй. Они пересекают первую окружность в точках $A$ и $B$. Из центра второй окружности $O_2$ проведены две касательные к первой. Они пересекают вторую окружность в точках $C$ и $D$. Доказать равенство отрезков $AB$ и $CD$.

**35.** Две окружности радиусов $R$ и $r$ касаются внешним образом. Найти расстояние от точки касания до их общей внешней касательной.

**36.** В треугольник $ABC$ вписан прямоугольник $DEFK$ так, что сторона прямоугольника $FK$ лежит на стороне $BC$ — основании треугольника. Точка $P$ — середина противоположной стороны $DE$ прямоугольника. Из точки $P$ опущен перпендикуляр $PS$ на основание треугольника. Найти геометрическое место середин всевозможных отрезков $PS$.

**37.** Даны угол $BAC$ и внутри его точка $M$. Провести через эту точку прямую так, чтобы отрезок прямой между сторонами угла делился точкой $M$ в данном отношении (задача Ньютона).

**38.** Даны треугольник $ABC$ со сторонами $a > b > c$ и произвольная точка $O$ внутри его. Пусть прямые $AO$, $BO$ и $CO$ пересекают

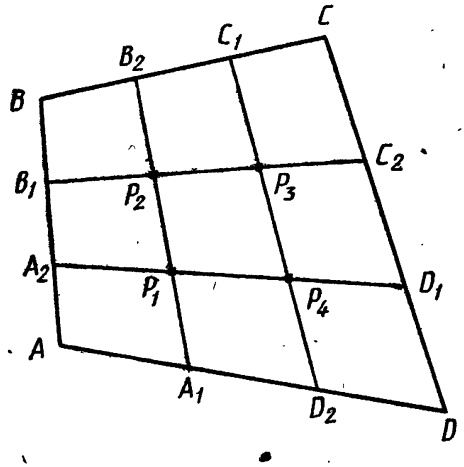



Рис. 26

стороны треугольника $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно в точках $P$, $Q$ и $R$. Доказать, что $OP + OQ + OR < a$.

**39.** Каждая из сторон произвольного плоского выпуклого четырехугольника $ABCD$ разделена точками на три равных отрезка: $AA_2 = A_2B_1 = B_1B$; $BB_2 = B_2C_1 = C_1C$; $CC_2 = C_2D_1 = D_1D$; $DD_2 = D_2A_1 = A_1A$. Отрезки $A_1B_2$ и $A_2D_1$ пересекаются в точке $P_1$, отрезки $B_1C_2$ и $A_1B_2$ — в точке $P_2$, отрезки $B_1C_2$ и $C_1D_2$ — в точке $P_3$ и отрезки $A_2D_1$ и $C_1D_2$ — в точке $P_4$ (рис. 26). Доказать, что отрезок $B_1P_2$ равен одной трети отрезка $B_1C_2$.

**40.** Доказать, что точки, симметричные точке пересечения высот данного треугольника (ортоцентра) относительно его сторон, находятся на окружности, описанной около этого треугольника.

## 8 класс

**41.** Найти сумму углов звездчатого (самопересекающегося) пятиугольника $ABCDH$ произвольной формы (рис. 27). (Все углы, которые называют углами звездчатого пятиугольника, отмечены на рисунке дужками.)

**42.** Треугольник $ABC$ обладает следующим свойством. Биссектриса $BB_1$ делит его на два равнобедренных треугольника, причем $AB = BB_1 = B_1C$. Найти углы треугольника $ABC$.

**43.** Если даны три вектора $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ таких, что $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 = \bar{0}$, то, расположив их так, что начало второго вектора совместится с концом первого, а начало третьего — с концом второго, получим треугольник. Обратно, если

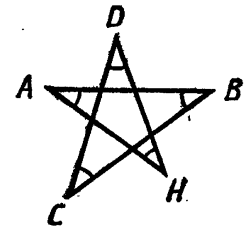



Рис. 27

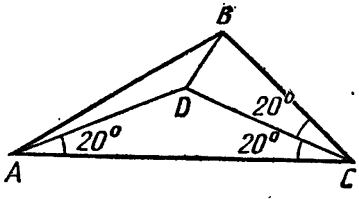



Рис. 28

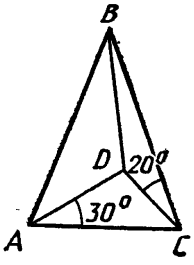



Рис. 29

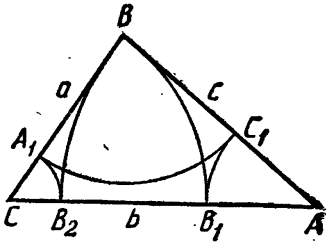



Рис. 30

имеется треугольник из векторов $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, то $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 = \bar{0}$. Знание этого факта поможет нам решить следующую задачу.

Из каждой вершины треугольника $ABC$ проведен отрезок до пересечения с противоположной стороной: $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$, причем длина отрезка $AB_1$ равна $\frac{1}{n}AC$, длина отрезка $BC_1$ равна $\frac{1}{n}BA$, длина отрезка $CA_1$ равна $\frac{1}{n}CB$, где $n$ — некоторое натуральное число. Доказать, что из отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, перемещая их параллельно самим себе, можно получить треугольник.

**44.** В треугольнике $ABC$ (рис. 28) угол $C$ равен 40°, на его биссектрисе отмечена точка $D$ так, что треугольник $BDC$ — равнобедренный ($BC = DC$), угол $DAC$ равен 20°. Найти величину угла $ABD$.

**45.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ каждый из углов $A$ и $C$ равен 70°. Внутри треугольника выбрана точка $D$ так, что угол $DAC$ равен 30°, а угол $DCB$ равен 20°. Найти угол $DBC$ (рис. 29).

**46.** В треугольнике $ABC$ справедливо соотношение длин сторон $b > c > a$ (рис. 30). Проведем дугу окружности радиуса $a$ с центром в точке $C$ до пересечения в точке $B_1$ со стороной $AC$. Затем проведем дугу окружности радиуса $AB_1$ с центром в точке $A$ до пересечения со стороной $AB$ в точке $C_1$. Далее точно так же проводим дуги $C_1A_1$, $A_1B_2$ и, наконец, дугу радиуса $AB_2$ с центром в точке $A$. Показать, что эта дуга пройдет через точку $B$.

**47.** В полуокружность вписан прямоугольный треугольник. На его катетах как на диаметрах во внешнюю сторону построены полуокружности. В результате получаем две серповидные луночки (на рис. 31 они заштрихованы). Доказать, что ширина этих луночек одинакова.

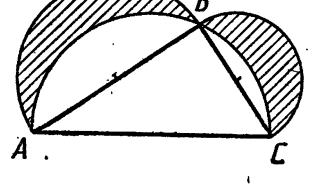



Рис. 31

Поясним, что означает термин «ширина луночки». Рассмотрим всевозможные перпендикуляры к катетам данного треугольника. Пересечение такого перпендикуляра с луночкой представляет отрезок прямой. Длина наибольшего из таких отрезков и есть ширина луночки, соответствующей выбранному катету.

**48.** Доказать, что если в четырехуголь-

нике противоположные углы попарно равны, то этот четырехугольник параллелограмм.

**49.** Восстановить пятиугольник на плоскости (не обязательно выпуклый) по серединам его сторон $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ и $O_5$.

**50.** Через данную точку $A$ провести хорду данной окружности так, чтобы разность ее отрезков, определяемых на ней положением точки $A$, равнялась $m$.

**51.** Если продлить биссектрисы внешних углов прямоугольника до взаимного пересечения, то получим некоторую фигуру. Определить ее вид и площадь, если длины сторон прямоугольника равны $a$ и $b$.

**52.** На плоскости даны три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Построить правильный треугольник с наибольшей возможной стороной, стороны которого проходят через эти три точки.

**53.** Около данного выпуклого четырехугольника описать квадрат.

**54.** Доказать, что если из произвольной точки $M$ окружности, описанной около треугольника $ABC$, опустить на его стороны или их продолжения перпендикуляры, то основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой (прямой Симсона).

**55.** Задача о «бабочке».

Дана окружность с центром в точке $O$. Точка $S$ — середина ее хорды $AB$. Хорды $CD$ и $EF$ проходят через точку $S$ (рис. 32). Хорды $ED$ и $CF$ пересекают хорду $AB$ соответственно в точках $N$ и $M$ (получилась фигура, похожая на бабочку, вписанная в окружность). Доказать, что $MS = SN$ (задача Горнера).

**56.** Дана дуга окружности $AB$ и хорда, стягивающая концы этой дуги. Рассмотрим окружность с центром $M$ на данной дуге и касающуюся данной хорды. Проведем к этой окружности касательные из точек $A$ и $B$. Найти геометрическое место точек $P$, в которых пересекаются пары таких касательных (рис. 33).

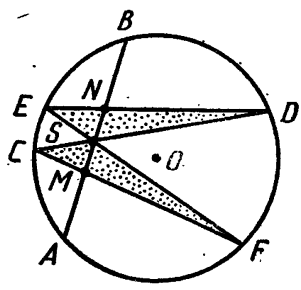


Рис. 32

**57.** Доказать, что если у вписанного в окружность четырехугольника диагонали равны, то этот четырехугольник — равнобедренная трапеция.

**58.** Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — четыре последовательно расположенные точки окружности. Хорды $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O_1$. Найти величину дуги, которой измеряется угол $AO_1B$.

**59.** Как измерить угол между касательной к данной окружности в точке $A$ и секущей, проходящей через ту же точку?

**60.** Из точки, взятой вне окружности, проведены две секущие. Найти величину дуги, которой измеряется угол между этими секущими.

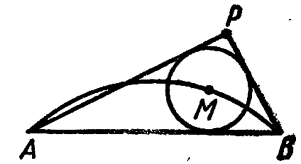


Рис. 33

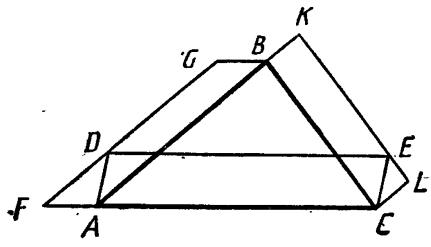



Рис. 34

**61.** Найти расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей произвольного треугольника. Доказать, что у любого треугольника радиус описанной окружности не меньше диаметра вписанной окружности.

**62.** Обладает ли звездчатый семиугольник постоянной суммой градусных мер «внутренних» углов?

**63.** Доказать, что круги, построенные на сторонах произвольного четырехугольника как на диаметрах, полностью его покрывают.

**64.** Пусть четырехугольник $ABCD$ такой, что в него можно вписать окружность. Рассмотрим хорды этой окружности, соединяющие пары противоположных точек касания $M$ и $P$, $N$ и $Q$. Доказать, что если хорды $MP$ и $NQ$ взаимно перпендикулярны, то около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

**65.** Три точки $A$, $B$, $C$ делят окружность на три произвольные дуги. Пусть точка $C'$ — середина дуги $AB$, точка $A'$ — середина дуги $BC$, точка $B'$ — середина дуги $AC$. Доказать, что прямая $B'C'$ перпендикулярна к прямой $AA'$.

**66.** На одной стороне угла с вершиной в точке $A$ взяты две точки $B$ и $C$ (для определенности примем, что точка $B$ расположена ближе к $A$, чем $C$), на другой — точки $D$ (ближняя к $A$) и $E$. Пары точек $D$ и $C$, $B$ и $E$ соединяем отрезками прямых, пересекающихся в точке $F$. В результате образуются четыре треугольника: $ADC$, $ABE$, $BFC$, $DFE$. Доказать, что описанные около них окружности пересекаются в одной точке.

**67.** Во всяком треугольнике $ABC$ параллелограмм $ADEC$, построенный на его стороне $AC$ как на основании во внутреннюю сторону (т. е. так, что он имеет, кроме стороны $AC$, и другие общие точки с треугольником $ABC$) и имеющий вершины $D$ и $E$ вне треугольника $ABC$, имеет площадь, равную сумме площадей параллелограммов $AFGB$ и $BKLC$, построенных на боковых сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ так, что сторона $FG$ параллелограмма $AFGB$ проходит через точку $D$, а сторона $KL$ параллелограмма $BKLC$ проходит через точку $E$ (рис. 34) (задача Паппа Александрийского).

**68.** На бумаге в клетку нарисованы два прямоугольных треуголь-

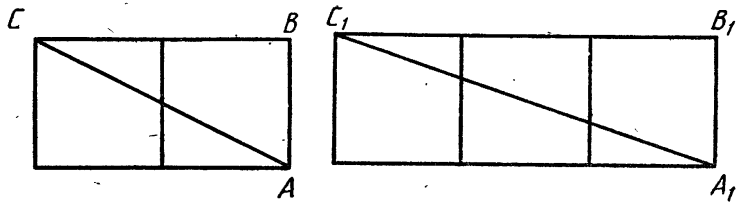



Рис. 35

ника (рис. 35). Доказать, что сумма углов $BCA$ и $B_1C_1A_1$ равна 45°.

**69.** В окружность вписан треугольник $ABC$. Биссектриса угла $ACB$ пересекает эту окружность в точке $M$. Представить вектор $\overline{CM}$ как сумму двух векторов, коллинеарных соответственно векторам $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

**70.** На плоскости даны правильный $2n$-угольник и некоторая точка $B$. Доказать, что из отрезков $A_1B$, $A_2B$, . . ., $A_{2n}B$ можно сложить какой-нибудь $2n$-угольник (иначе говоря, замкнутую ломаную линию из $2n$ звеньев). $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ — вершины данного $2n$-угольника.

**71.** $A$, $B$, $C$ и $D$ — произвольные точки на плоскости. Доказать справедливость равенства $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$ (здесь точкой обозначается операция скалярного произведения двух векторов).

**72.** Внутри произвольного треугольника $ABC$ найти такую точку $O$, что, проведя к вершинам треугольника отрезки прямых $OA$, $OB$ и $OC$, получим равные углы $OAB$, $OBC$ и $OCA$ (рис. 36). Указать способ построения этой точки $O$.

**73.** Пусть стороны четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$, вписанного в окружность, равны $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ ($a_1 = P_1P_2$, $a_2 = P_2P_3$ и т. д.). Диагональ, соединяющая вершины $P_1$ и $P_3$ четырехугольника, равна $f$, а диагональ, соединяющая вершины $P_2$ и $P_4$, равна $e$. Доказать, что тогда справедливо равенство $\frac{f}{e} = \frac{a_1a_2 + a_3a_4}{a_2a_3 + a_1a_4}$ (задача из древнеиндийской рукописи).

**74.** На основании $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ взята точка $K$ так, что $AK = a$, $BK = b$. Найти $CK$, если $AC = p$.

**75.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ вдвое больше угла $C$. По данным сторонам $b = AC$ и $c = AB$ найти сторону треугольника $a$.

**76.** Заданы прямые, перпендикулярные сторонам многоугольника и проходящие через их середины. Построить многоугольник, если известны длины его сторон.

**77.** Пусть выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность с центром в точке $O$. Доказать, что в этом случае: а) сумма углов $AOB$ и $COD$ равна 180°; б) $\frac{OA^2}{OC^2} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}$.

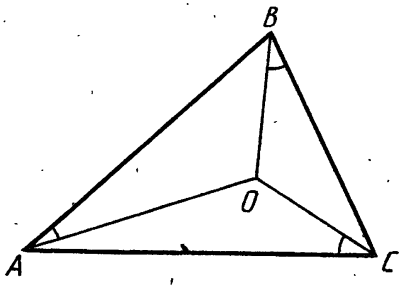



Рис. 36

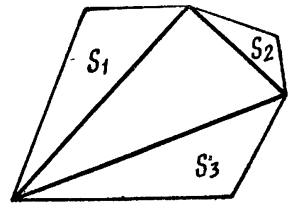



Рис. 37

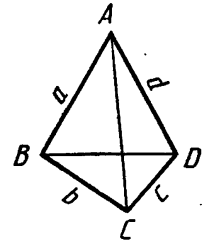



Рис. 38

**78.** Если на катетах прямоугольного треугольника построить внешним образом подобные треугольники так, чтобы их соответственные стороны совпадали с этими катетами, и аналогично построить внешним образом подобный им треугольник на гипотенузе, то сумма площадей $S_1$ и $S_2$ треугольников, построенных на катетах, равна площади $S_3$ треугольника, построенного на гипотенузе (рис. 37).

**79.** Разделить пополам прямым разрезом (а не в виде ломаной) площадь плоской выпуклой фигуры, ограниченной дугой окружности и двумя отрезками прямых (старинная задача из арабской рукописи).

**80.** В Древнем Египте площадь четырехугольного земельного участка вычисляли по формуле $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, где $a$, $b$, $c$ и $d$ — длины последовательных сторон четырехугольника (рис. 38). Результат, полученный по этой формуле, больше или меньше подлинного?

**81.** В квадрат вписан равносторонний треугольник так, что одна из вершин его совпадает с серединой стороны квадрата. Найти отношение площадей этих фигур.

**82.** В квадрат вписан равносторонний треугольник так, что одна из его вершин совпадает с вершиной квадрата. Найти отношение площадей этих фигур.

**83.** Построить квадрат, площадь которого равна $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$, если даны отрезки $a$, $b$ и $c$.

**84.** Внутри треугольника $ABC$ найти точку $O$, для которой произведение длин перпендикуляров, опущенных из точки $O$ на стороны треугольника, достигает наибольшего значения.

**85.** Хорда $AB$ окружности разделена точками $C$ и $D$ на три равных отрезка. Из центра $O$ окружности проведены прямые $OC$ и $OD$ до пересечения с окружностью соответственно в точках $E$ и $F$. Доказать, что дуга $EF$ больше дуги $AE$.

**86.** В трапеции $ABCD$ прямая, параллельная ее основаниям, пересекает боковую сторону $AB$ (рис. 39) в точке $D$, диагональ $AC$ в точке $E$, диагональ $BD$ в точке $F$ и, наконец, боковую сторону $CD$ в точке $G$. Доказать равенство отрезков $DE$ и $FG$.

**87.** В трапеции $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $AB = b$, $CD = a$. Через точку $O$ пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая ее боковые стороны в точках $M$ и $N$, $MN = c$. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

**88.** Стороны треугольника $ABC$ — $a$, $b$ и $c$. Окружность проведена так, что она касается его сторон $a$ и $b$ соответственно в точках $D$ и $E$, а центр ее лежит на стороне $c$. Найти радиус этой окружности.

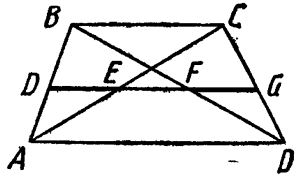


Рис. 39

**89.** Если соединить середину одной из непараллельных сторон трапеции с концами противолежащей стороны, то полученный треугольник равновелик половине данной трапеции. Доказать.

**90.** В треугольнике $ABC$ на основании $AC$ взята произвольно точка $D$ и проведены

отрезки прямых — $DE$ параллельно $AB$ до пересечения с $BC$ в точке $E$ и $DF$ параллельно $BC$ до пересечения с $AB$ в точке $F$. Площади треугольников $AFD$ и $DEC$ равны соответственно $S_1$ и $S_2$. Найти площадь параллелограмма $DFBE$.

**91.** Меньшее основание трапеции $DC = b$, большее $AB = a$. На продолжении стороны $CD$ найти точку $M$ такую, чтобы прямая $AM$ разделила трапецию на две равновеликие части.

**92.** Показать, что сумма высот треугольника больше ушестеренного радиуса вписанной в него окружности.

**93.** Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник. Точка $M$ — середина стороны $BC$, точка $N$ — середина стороны $AD$. Отрезки $AM$ и $BN$ пересекаются в точке $P$, и отрезки $MD$ и $NC$ пересекаются в точке $Q$. Доказать, что: а) сумма площадей треугольников $AMD$ и $BNC$ равна площади данного четырехугольника $ABCD$; б) сумма площадей треугольников $ABP$ и $CDQ$ равна площади четырехугольника $PMQN$.

**94.** На каждой из сторон выпуклого плоского четырехугольника взято по две точки, делящих сторону на три равные части. Из этих точек составляются пары. В пару входят точки, лежащие на противоположных сторонах четырехугольника и расположенные ближе к одной и той же его стороне. Пары точек соединяются отрезками прямых, в результате чего данный четырехугольник оказывается разделен на девять маленьких четырехугольников. Показать, что площадь среднего из этих маленьких четырехугольников равна одной девятой площади всего данного четырехугольника.

**95.** У треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ углы $A$ и $A_1$ равны. Доказать, что их площади относятся как произведение сторон, заключающих эти углы, т. е. $\dfrac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

**96.** В полукруг радиуса $R$ вписан квадрат. Найти его площадь.

**97.** Из вершины $A$ треугольника $ABC$ к стороне $BC$ проведен отрезок $AA_1$, из вершины $B$ проведен отрезок $BB_1$, из вершины $C$ — отрезок $CC_1$. Прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке $D$. Доказать, что $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$ (теорема Чевы).

**98.** Из вершин треугольника $ABC$ проведены отрезки прямых $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ до пересечения с противоположными сторонами в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. При этом оказалось, что $\dfrac{AB_1}{B_1C} \times \times \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$. Доказать, что тогда отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке (обратная теорема Чевы).

**99.** Боковые стороны $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ продолжены до их пересечения в точке $E$, $F$ — точка пересечения диагоналей данной трапеции. Доказать, что прямая $EF$ делит большее основание данной трапеции пополам.

**100.** Прямая в плоскости треугольника отсекает на его сторонах или их продолжениях шесть отрезков. Доказать, что произведение трех не смежных друг другу отрезков равно произведению трех остальных.

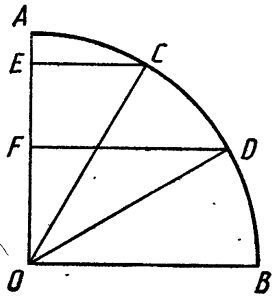


Рис. 40

**101.** Воспользовавшись теоремой, обратной теореме Чевы, доказать, что:

а) медианы треугольника пересекаются в одной точке;

б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

в) высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

**102.** Из центра масс треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, длины которых $a$ и $b$. Сумма этих перпендикуляров равна $l$. Найти длину каждого из них.

**103.** В каком отношении делит точка пересечения биссектрис треугольника каждую из них?

**104.** Построить треугольник $ABC$, зная положение его центра масс $G$, центра $O$ описанной окружности и вершины $B$.

**105.** Дуга $AB$, равная четверти окружности, разделена точками $C$ и $D$ на три равные части, $O$ — центр круга, $CE \parallel DF \parallel OB$. Доказать, что площадь сектора $COD$ равна площади криволинейной трапеции $FECD$ (криволинейна у нее одна сторона — $CD$) (рис. 40).

**106.** Дан круг. Геометрическим построением разделить его на три концентрические фигуры — круг поменьше и два концентрических кольца — так, чтобы площади всех трех фигур были равны между собой.

**107.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ взята произвольная точка $D$ и около треугольников $ABD$ и $ACD$ описаны окружности. Найти отношение их площадей.

**108.** Если через точку, находящуюся внутри круга, провести две взаимно перпендикулярные прямые, то образуются две хорды, которые разделятся точкой их пересечения на отрезки $a$, $b$ и $c$, $d$. Доказать что площадь круга $S = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

## РЕШЕНИЯ

### 7 класс

**1.** Выберем на плоскости четыре точки $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P_4$, окрашенные в разные цвета. Если окажется, что три из этих точек лежат на одной прямой, то эта прямая и будет трехцветной. Предположим, что никакие три из четырех по-разному окрашенных точек не лежат на одной прямой. Пусть точка $P_1$ окрашена в цвет $p_1$, точка $P_2$ — в $p_2$, $P_3$ — в $p_3$, $P_4$ — в $p_4$. Рассмотрим прямые $P_1P_2$ и $P_3P_4$. Они либо параллельны, либо пересекаются. Если они пересекаются в точке $P$, то эта точка должна быть окрашена в один из четырех цветов. Если она цвета $p_1$ или $p_2$, то прямая $P_3P_4$ оказывается как минимум трех-

цветной. Если же она цвета $p_3$ или $p_4$, то как минимум трехцветной оказывается прямая $P_1P_2$.

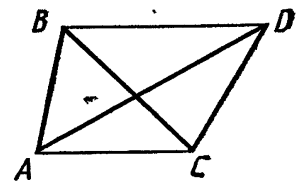


Рис. 41

Разберем случай, когда прямые $P_1P_2$ и $P_3P_4$ параллельны. Тогда $P_1P_2$ и $P_3P_4$ — основания трапеции (или противоположные стороны параллелограмма), а $P_1P_4$ и $P_2P_3$ (или $P_1P_3$ и $P_2P_4$) — диагонали (трапеции или параллелограмма), которые, естественно, не могут не пересекаться. Пусть их пересечение — точка $Q$. Перебирая всевозможные цвета для окраски точки $Q$, получаем, что одна из диагоналей обязана оказаться как минимум трехцветной. Все возможные случаи рассмотрены.

**2.** Могут, если у него стороны самопересекающиеся. Только оговоримся, что такой четырехугольник лучше называть четырехсторонником. Например, на рисунке 41 диагоналями самопересекающегося четырехсторонника $ABCD$ служат отрезки прямых $AC$ и $BD$ (а сторонами — $AB$, $CD$, $AD$ и $BC$).

В четырехстороннике пересекаются обязательно либо стороны, либо диагонали. Этот факт использовался в решении задачи 1.

**3.** Из треугольника $ABD$ получаем неравенство $AB < AD + BD$, из треугольника $BCD$ — неравенство $BC < DC + BD$. Складывая эти два неравенства, получаем искомое $AB + BC < 2BD + AC$.

Последнее неравенство можно записать так: $BD > \dfrac{AB + BC - AC}{2}$.

Получили оценку снизу длины отрезка внутри треугольника, проведенного через его вершину.

**4.** Да, возможно, если в данном треугольнике $ABC$ углы $B$ и $C$ не равны. Пусть, например, $\angle B < \angle C$. Проведем секущую $AD$ так, чтобы точка $D$ принадлежала отрезку $BC$, причем $AD = AC$. Рассмотрим треугольники $ABC$ и $ABD$. У них по две равные стороны ($AB$ — общая сторона, $AC = AD$), угол $B$ общий.

**5.** Пусть в искомом треугольнике $A'B'C'$ $A'C' = AC$, $A'B' = BC$ и $B'C' = AB$. Поскольку треугольник $ABC$ остроугольный, то центр $O$ описанной окружности находится внутри его. Отрезки $OA$, $OB$ и $OC$ равны. Сумма углов $AOB$, $BOC$ и $AOC$ равна 360°. Из-за равенства сторон треугольники $AOB$ и $BOC$ можно поменять местами так, что сторона $OB$ треугольника $BOC$ совместится с равной ей стороной $AO$ треугольника $AOC$. Сторона $OC$ треугольника $BOC$ совместится со стороной $AO$ треугольника $AOB$, а сторона $OB$ треугольника $AOB$ совместится со стороной $OC$ треугольника $AOC$. При этом угол $A'$ треугольника $A'B'C'$ равен углу $ACB$ треугольника $ABC$, угол $C'$ треугольника

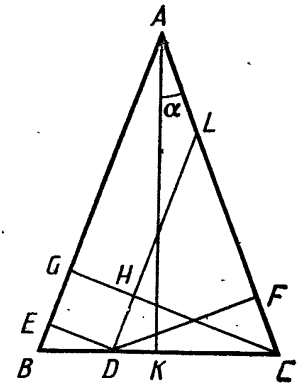


Рис. 42

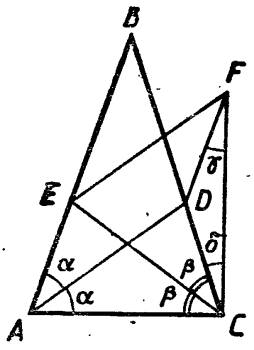



Рис. 43

$A'B'C'$ равен углу $BAC$ треугольника $ABC$.

**6.** Выполним дополнительные построения (рис. 42). Пусть $AK$ — высота, проведенная к основанию $BC$ (она же биссектриса угла $A$), а $CG$ — высота, проведенная к боковой стороне $AB$; $ED \perp AB$, $DF \perp AC$.

Сумма длин отрезков $ED$ и $DF$ равна искомой сумме расстояний. Проведем отрезок $DL$, перпендикулярный $CG$. Угол $CAK$ равен углу $HCD$ и равен углу $FDC$. Следовательно, отрезки $HC$ и $DF$ имеют равную длину, отрезки $GH$ и $ED$ равны по построению. Итак, $ED + DF = GH + HC = GC$.

**7.** Пусть луч $AE$ пересекает отрезок $BC$ в точке $F$. Из подобия треугольников $AED$ и $BEF$ следует, что $\frac{BE}{ED} = \frac{BF}{AD}$. Далее, $\frac{AD}{BE} = \frac{BC}{BF} = \frac{BF + FC}{BF} = \frac{1}{k}$ и $\frac{FC}{BF} = -1 + \frac{1}{k}$, $\frac{BF}{FC} = \frac{k}{1-k}$.

**8.** Пусть в треугольнике $ABC$ равны биссектрисы $AD$ и $CE$ (рис. 43). Биссектриса $AD$ делит угол $BAC$, равный $2\alpha$, на два равных угла. Биссектриса $CE$ делит угол $ACB$, равный $2\beta$, на два равных угла. Проводим отрезок $DF$, равный и параллельный $AE$ так, как показано на рисунке, соединяем точку $F$ отрезками прямых с точками $C$ и $E$. Фигура $AEFD$ — параллелограмм и $EF = AD = CE$ (по условию). Таким образом, треугольник $CEF$ равнобедренный по построению, угол $EFC$ равен углу $FCE$.

Предположим теперь, что треугольник $ABC$ не равнобедренный, и покажем, что это предположение приведет нас к противоречию. Пусть угол $DFC$ равен $\gamma$, а угол $DCF$ — $\delta$. Тогда из равенства углов $EAD$ и $EFD$ следует, что $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ (*). Примем для определенности, что $\alpha > \beta$. Отсюда следует, что $CD > EA$ и $CD > FD$. Поэтому должно быть: $\gamma > \delta$. Как следствие получаем, что $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. Последнее неравенство противоречит равенству (*).

**9.** Возможны два случая. В первом случае угол, равный 60°, расположен между равными сторонами. Тогда каждый из двух других углов равен $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$. Во втором случае угол, равный 60°, примыкает только к одной из равных сторон. Тогда угол, примыкающий к другой из равных сторон, равен 60°. Третий угол равен $180° - 60° = 60°$.

В обоих случаях данный треугольник оказывается равноугольным и, следовательно, равносторонним.

**10.** Дополним данный треугольник $ABC$ до равностороннего треугольника $AEC$ (рис. 44). Проведем отрезок $BE$. Так как $AB = BC$, то $BE$ является биссектрисой угла $AEC$ и угол $BEA$ равен 30°. Треугольники $ABE$ и $ADC$ равны (по двум углам и стороне). Поэтому $BE = DC$ и $CDBE$ — трапеция. Следовательно, искомый угол $DBC$ равен углу $BCE$ и равен 20°.

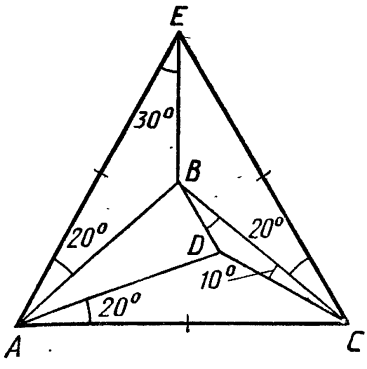



Рис. 44

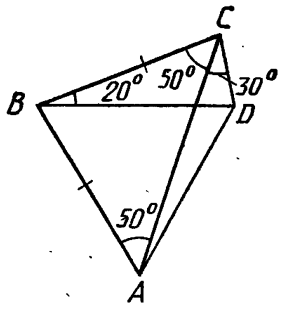



Рис. 45

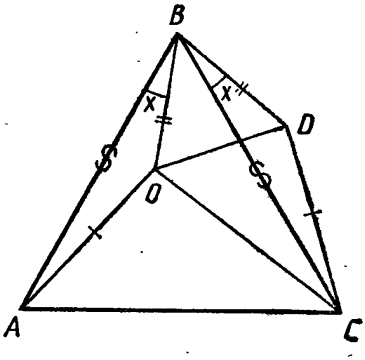



Рис. 46

**11.** Вычислим угол $BDC$ (рис. 45). В треугольнике $BDC$ один угол равен 20°, другой 80°, следовательно, угол $BDC$ равен 80°. Поэтому треугольник $BDC$ равнобедренный и $BC = BD$. Значит, и треугольник $ABD$ равнобедренный. Его угол $ABD$ равен 60°. А равнобедренный треугольник, один из углов которого равен 60°, равносторонний (см. задачу 9). Следовательно, угол $BAD$ равен 60°, а искомый угол $CAD$ равен 10°.

**12.** Легко убедиться в равенстве треугольников $ABO$ и $CBD$ (рис. 46). У них равны стороны $AB$ и $BC$, $BO$ и $BD$. Покажем, что равны углы $ABO$ и $CBD$. Первый из них в сумме с углом $OBC$ (по условию) составляет $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$ составляет в сумме с углом $BOC$ и второй угол. Из равенства треугольников следует равенство их соответствующих сторон: $CD = OA$.

**13.** $BD$ — высота треугольника, опущенная из вершины $B$, $E$ — середина стороны $AB$, $F$ — середина стороны $BC$ (рис. 47). Треугольники $AED$ и $DFC$ равнобедренные. При перегибании по штриховым линиям совместятся соответственно равные треугольники $EBF$ и $EDF$, $FHC$ и $FHD$, $AEG$ и $EGD$. Все три вершины $A$, $B$ и $C$ совместятся при этом в точке $D$.

**14.** Пусть прямые $AM$ и $AN$ пересекаются с продолжением стороны треугольника $BC$ соответственно в точках $P$ и $Q$. Из равенства прямоугольных треугольников $ABM$ и $PMB$, $ACN$ и $QCN$ находим: $AB = PB$, $AM = MP$, $AC = CQ$ и $AN = NQ$. Отрезок $MN$ — средняя линия треугольника $PAQ$.

$$MN = \frac{PQ}{2} = \frac{PB + BC + CQ}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

**15.** Обратимся к рисунку 48. На нем точка $O$ — общий центр симметрии параллелограмма и квадрата, отрезок прямой $OB_1$ перпендикулярен прямой $B_1B$, отрезок $OA_1$ параллелен $B_1B$ и $AA_1$ параллелен $OB_1$. У прямоугольных треугольников $B_1OB$ и $A_1OA$ равны гипотенузы (половины диагоналей квадрата) и углы $AOA_1$ и $BOB_1$

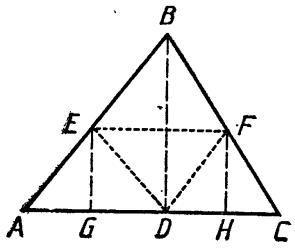



Рис. 47

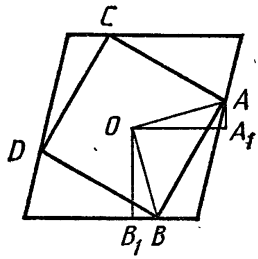



Рис. 48

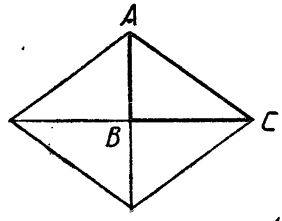



Рис. 49

(поскольку углы $AOB$ и $A_1OB_1$ прямые). Следовательно, треугольники эти равны.

Представим, что фигура, изображенная на рисунке, нарисована на «основном» листе бумаги и точно такая же нарисована на прозрачном листе, наложенном на первый, причем все точки обеих фигур воспринимаются нами как совпадающие. Повернем теперь прозрачный лист бумаги относительно общей их точки $O$ на угол 90° против движения часовой стрелки. Тогда точка $B$ перейдет в точку $A$ и тем самым мы отыщем одну сторону $AB$ искомого квадрата. С помощью центральной симметрии относительно точки $O$ находим затем сторону $CD$ квадрата. В результате все четыре вершины квадрата найдены, что и требовалось.

**16.** Переплетчик, надо полагать, убедился, что кусок картона имеет форму ромба. Остается убедиться, что у этого ромба диагонали равны. Тогда ромб — квадрат.

**17.** Сторона ромба может быть равна диагонали, если ромб составлен из двух равносторонних треугольников (рис. 49). Половине диагонали сторона ромба равняться не может.

**18.** При повороте на 180° относительно точки $O$ параллелограмм $ABCD$ самосовмещается (рис. 50). При этом точка $A$ перейдет в точку $C$, точка $C$ — в точку $A$, точка $B$ — в точку $D$, а точка $D$ — в точку $B$. Пристроенный к $BC$ квадрат с центром $O_2$ перейдет в квадрат с центром $O_4$ и т. д. Это означает, во-первых, что противоположные стороны четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ попарно равны и параллельны. Следовательно, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ — параллелограмм. Точка $O$ — его центр симметрии.

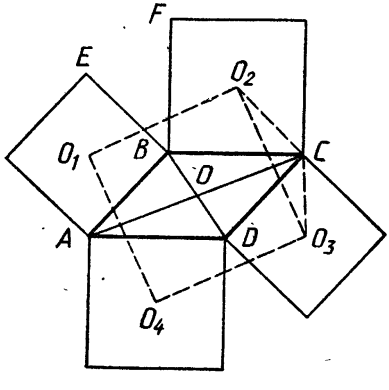



Рис. 50

Покажем, что смежные стороны параллелограмма равны, например $O_1O_2 = O_2O_3$. Действительно, угол $EBF$ равен углу $BCD$, потому что как тот, так и другой составляют в сумме с углом $ABC$ развернутый угол. Следовательно, угол $O_1BO_2$ равен углу $O_2CO_3$. Треугольники $O_1BO_2$ и $O_2CO_3$ равны. Значит, $O_1O_2 = O_2O_3$.

Параллелограмм, у которого соседние стороны равны, — ромб. Ромб, у которого хотя бы один из углов прямой, — квадрат. Таким образом, если мы докажем, что угол $O_1O_2O_3$ в данном четырехугольнике $O_1O_2O_3O_4$ прямой, то тем самым докажем, что рассматриваемый четырехугольник — квадрат. Если от прямого угла $BO_2C$ отнять острый угол $CO_2O_3$ и добавить после этого равный ему угол $O_1O_2B$ (треугольники $O_1BO_2$ и $O_2CO_3$ равны), то получившийся угол $O_1O_2O_3$ равен углу $BO_2C$, т. е. является прямым, что и требовалось.

**19.** Теорема, обратная теореме Пифагора, формулируется так: «Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей его стороны, то треугольник прямоугольный».

Доказательство этой теоремы можно провести способом от противного. Пусть $a$, $b$ и $c$ — длины сторон данного треугольника и $a^2+b^2=c^2$, но этот треугольник не прямоугольный. Покажем, что предположение «треугольник не прямоугольный» приводит к противоречию. Рассмотрим прямоугольный треугольник со сторонами $a$ и $b$. Тогда по прямой теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Этот треугольник равен по трем сторонам данному, но он прямоугольный. Пришли к противоречию. Следовательно, рассматриваемый треугольник действительно прямоугольный.

**20.** Пусть $C(x;\ y)$ — искомая точка плоскости. Тогда $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$, поскольку расстояния от точки $C$ до точек $A$ и $B$ равны. Возводя обе части полученного равенства в квадрат, находим: $x^2+y^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1$, откуда $x+y=1$. Следовательно, вершина $C$ находится на прямой $x+y=1$. Эта прямая — перпендикуляр к отрезку $AB$, проходящий через его середину. Длина стороны искомого треугольника $ABC$ равна $\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$. Расстояние между точками $A$ и $C$ равно $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{2}$, откуда $x^2+y^2=2$. Таким образом, решение задачи сведено к решению системы уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

Решив эту систему, получаем два возможных положения точки $C$:

$$C\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ и } C\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

**21.** Представим данное уравнение в виде $(x-1)^2+y^2=1$. Это уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке (1; 0).

**22.** Введем обозначения так, как они показаны на рисунке 51. Искомое расстояние пусть равно $d$. Проектируя отрезки на вертикаль или горизонталь, получаем соответственно:

$$d\sin\varphi_7 = c\sin\varphi_6 = c\cos\varphi_5,\ d\cos\varphi_7 = a\sin\varphi_1 = a\cos\varphi_2,$$
$$a\sin\varphi_2 = b\sin\varphi_3,\ b\sin\varphi_3 = b\cos\varphi_4,\ b\sin\varphi_4 = c\sin\varphi_5,$$
$$d^2 = c^2\cos^2\varphi_5 + a^2\cos^2\varphi_2 = c^2 + a^2 - c^2\sin^2\varphi_5 - a^2\sin^2\varphi_2 =$$
$$= c^2 + a^2 - c^2\sin^2\varphi_5 - b^2\sin^2\varphi_3 = c^2 + a^2 - c^2\sin^2\varphi_5 -$$
$$- b^2\cos^2\varphi_4 = a^2 - b^2 + c^2 - c^2\sin^2\varphi_5 + b^2\sin^2\varphi_4 =$$
$$= a^2 - b^2 + c^2.$$

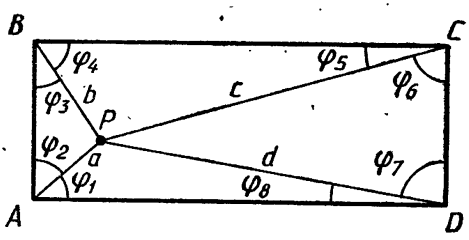



Рис. 51

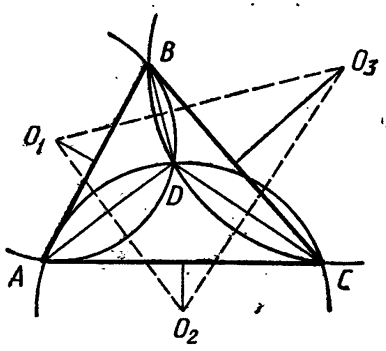



Рис. 52

23. Опишем около треугольников $ABD$, $CAD$ и $BDC$ (рис. 52) окружности. Обозначим центры этих окружностей соответственно через $O_1$, $O_2$, $O_3$. Из точки $O_1$ проведем перпендикуляр к стороне $AB$, из точки $O_2$ — перпендикуляр к стороне $AC$ и из точки $O_3$ — перпендикуляр к стороне $BC$. Эти перпендикуляры проходят через середины сторон треугольника $ABC$ и поэтому пересекаются в одной точке (центре $O$ описанной около треугольника $ABC$ окружности, на рисунке эта точка не нанесена). Проведем теперь отрезки $O_1O_3$, $O_1O_2$ и $O_2O_3$. Отрезок $O_1O_3$ перпендикулярен общей хорде $BD$ двух окружностей, поскольку принадлежит прямой, проходящей через их центры. Аналогично $O_1O_2 \perp AD$ и $O_2O_3 \perp DC$. Если теперь повернуть треугольник $O_1O_2O_3$ на прямой угол относительно точки $O$, например по движению часовой стрелки, то в новом положении отрезок $O_1O_3$ станет параллельным $AD$, отрезок $O_1O_3$ — параллельным $BD$ и отрезок $O_2O_3$ — параллельным $DC$. Итак, стороны повернутого треугольника $O_1O_2O_3$ окажутся параллельными отрезкам $AD$, $BD$ и $CD$, а отрезки $OO_1$, $OO_2$, $OO_3$, пересекающиеся в общей точке $O$, будут параллельны соответственным сторонам треугольника $ABC$, что и требовалось.

24. Пусть вершина $A$ равностороннего треугольника $ABC$ находится на средней из рассматриваемых прямых, вершина $B$ — на

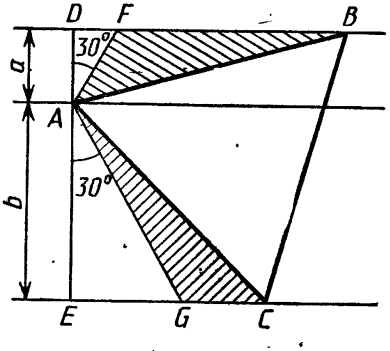



Рис. 53

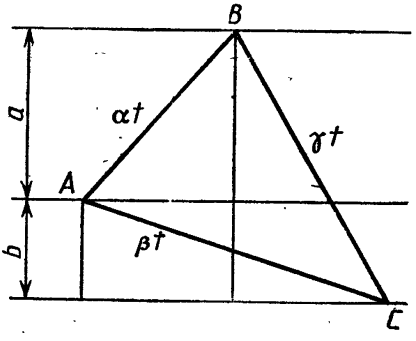



Рис. 54

верхней (рис. 53). Выполним дополнительное построение — проведем через точку $A$ перпендикуляр $DE$ к данным прямым. Из точки $A$ под углом в 30° к $DE$ проведем отрезки $AF$ и $AG$ (как сделано на рисунке). Рассмотрим теперь два треугольника $AFB$ и $ACG$. В этих треугольниках $AB = AC$ (по условию), угол $AFB$ равен углу $AGC$ и равен 120° (по построению). Покажем, что эти два треугольника равны. Для этого достаточно показать, что равны углы $FBA$ и $CAG$. Видим, что сумма углов $FAB$ и $CAG$ равна $180° - 2 \cdot 30° - 60° = 60°$. С другой стороны, угол $FAB$ в сумме с углом $FBA$ составляет $180° - 120° = 60°$. Следовательно, углы $FBA$ и $CAG$ равны. Теперь получаем, что $FB = AG = \frac{b}{\cos 30°} = \frac{2b}{\sqrt{3}}$, $GC = AF = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; $EG = AG \sin 30° = AG \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Если принять искомую сторону равностороннего треугольника за $x$, то из прямоугольного треугольника $AEC$ получаем:

$$x = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{b^2 + 4ab + 4a^2}{3}} = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

**25.** Стороны искомого треугольника должны быть равны $\alpha t$, $\beta t$, $\gamma t$, где $t$ — значение параметра, удовлетворяющее условию задачи. Обозначим вершину треугольника, расположенную на средней из параллельных прямых, буквой $A$, на верхней — буквой $B$, на нижней — буквой $C$ и примем, что длина стороны $AB$ равна $\alpha t$, сторона $AC$ — $\beta t$ и сторона $BC$ — $\gamma t$ (рис. 54). Спроектируем вершины треугольника на нижнюю прямую. Для случая, когда проекция вершины $B$ находится между проекцией точки $A$ и точкой $C$, получим:

$$\sqrt{(\alpha t)^2 - a^2} + \sqrt{(\gamma t)^2 - (a + b)^2} = \sqrt{(\beta t)^2 - b^2}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, после сокращения на $t^2$ ($t \neq 0$) находим:

$$t^2((\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) - 4\alpha^2\gamma^2) = -4(\alpha^2(a + b)^2 + \gamma^2 a^2 - a(a + b) \cdot (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)). \quad (*)$$

Запишем по-другому коэффициент при $t^2$:

$$(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) - 4\alpha^2\gamma^2 = (\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2) \times (\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma - \beta^2) = (\alpha - \beta - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) \times (\alpha - \beta + \gamma) = -(-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma).$$

Обозначим: $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, где $p$ — полупериметр данного треугольника. Тогда коэффициент при $t^2$ запишется так: $16p(p - \alpha) \times (p - \beta)(p - \gamma)$. Действительно, например, $-\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma - 2\alpha = 2(p - \alpha)$. Обозначим: $S = \sqrt{p(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma)}$.

Заметим, что численно $S$ равна площади данного треугольника со сторонами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Поэтому коэффициент при $t^2$ равен $(4S)^2$.

Рассмотрим теперь правую часть равенства (*). Она запишется так:

$$-4(\alpha^2a^2+\alpha^2 2ab+\alpha^2b^2+\gamma^2a^2-a^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2\gamma^2-ab\alpha^2+ab\beta^2-ab\gamma^2)=-4(ab(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)+\alpha^2b^2+a^2\beta^2).$$

Отрицательное значение $t$ в нашем случае смысла не имеет. Поэтому получаем так: $t_0=\frac{\sqrt{ab(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)+\alpha^2b^2+\beta^2a^2}}{2S}$. Стороны искомого треугольника имеют соответственно длины $\alpha t_0$, $\beta t_0$, $\gamma t_0$.

Аналогично задача решается и для случая, когда проекция вершины $A$ находится между проекцией точки $B$ и точкой $C$. Формула для вычисления $t_0$ симметрична относительно $\alpha$ и $\beta$, поэтому запись ее и для этого случая остается прежней.

**26.** Перпендикуляр меньше наклонной. Поэтому $h_c \leqslant b$, $h_b \leqslant a$, $h_a \leqslant c$ (рис. 55). В треугольнике $ABC$ не может быть двух прямых углов. Поэтому из приведенных неравенств хотя бы одно строгое. Пусть, например, $h_c < b$.

Складывая почленно неравенства, получаем требуемое строгое неравенство $h_a + h_b + h_c < a + b + c$.

**27.** Хотя бы одна из дуг, стягивающихся сторонами треугольника, не менее четверти окружности. Примем, что это дуга $AB$. Пусть $AD$ — диаметр описанной окружности, проходящей через вершину $A$ данного треугольника. Точки $B$ и $C$ находятся по разные стороны от $AD$.

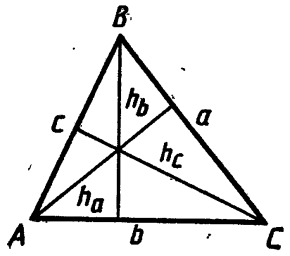



Рис. 55

Пусть $BC$ пересекает $AD$ в точке $P$, $BQ$ — перпендикуляр, проведенный из точки $B$ к $AD$. Имеем $AB > AQ$ ($AB$ — гипотенуза в прямоугольном треугольнике $ABQ$, $AQ$ — катет). $BP > BQ$ ($BP$ — гипотенуза в прямоугольном треугольнике $PBQ$), но $BQ > QD$ (треугольники $BQD$ и $ABD$ подобны). Дуга $BD$ не превышает дугу $AB$, поэтому $AB > BD$ и $BQ > QD$.

Следовательно, $AB + BP > AQ + QD = AD$, аналогичным образом получаем: $AC + CP > AD$. Суммируя эти два неравенства, находим $AB + AC + BC > 2AD$, что и требовалось.

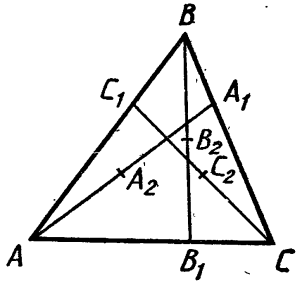



Рис. 56

**28.** Пусть $O$ — центр данной окружности, а точки $A$, $B$ и $C$ — середины названных дуг. Проведем отрезки прямых $OA$, $OB$, $OC$. Они перпендикулярны искомым сторонам треугольника.

Выбрав по произвольной точке на этих отрезках, проведем через них перпендикуляры до взаимного пересечения. В результате получим треугольник, стороны которого —

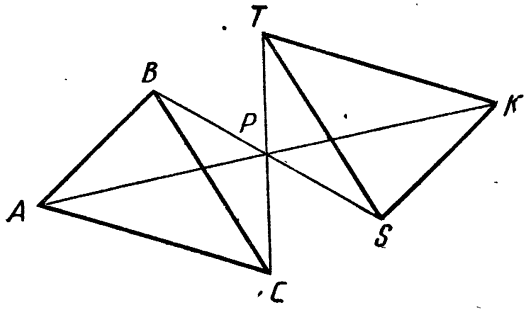



Рис. 57

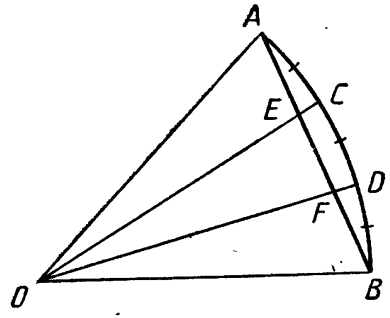



Рис. 58

параллельны сторонам искомого треугольника. Следовательно, он ему подобен. Опишем около него окружность. Параллельно перенесем полученный треугольник так, чтобы центры обеих окружностей совпали. Проведем из $O$ лучи через вершины полученного треугольника. Точки пересечения этих лучей с данной окружностью определят вершины искомого треугольника.

**29.** Пусть данный треугольник — $ABC$ и названные отрезки прямых обозначены $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, их середины соответственно точки $A_2$, $B_2$ и $C_2$ (рис. 56). Тогда точка $A_2$ лежит на средней линии треугольника, параллельной стороне $BC$, точка $B_2$ — на средней линии треугольника, параллельной $AC$, $C_2$ — на средней линии треугольника, параллельной $AB$. Эти средние линии пересекаются на сторонах треугольника $ABC$. А стороны треугольника не имеют общей точки.

**30.** Треугольники $ABC$ и $STK$ согласно условию задачи симметричны относительно точки $P$ (рис. 57). Их можно совместить поворотом на 180° относительно центра симметрии $P$. Следовательно, они равны.

**31.** Рассмотрим треугольник $OEB$ (рис. 58). В нем $OF$ — биссектриса угла $EOB$. Поэтому $\frac{EF}{FB} = \frac{OE}{OB} < 1$.

**32.** Проведем отрезки прямых $BC$ и $AD$ (рис. 59). Треугольники $ADE$ и $CBE$ подобны. Действительно, вписанные углы $BAD$ и $BCD$ опираются на одну и ту же дугу $BD$, угол $AEC$ у этих треугольников

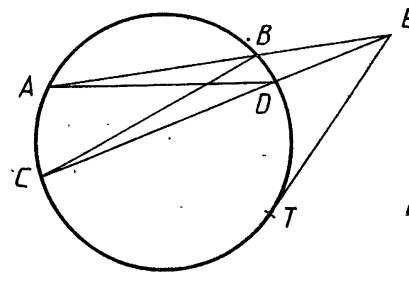



Рис. 59

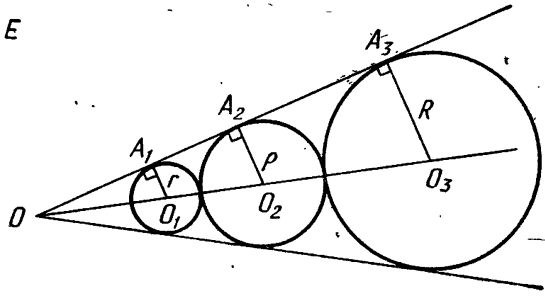



Рис. 60

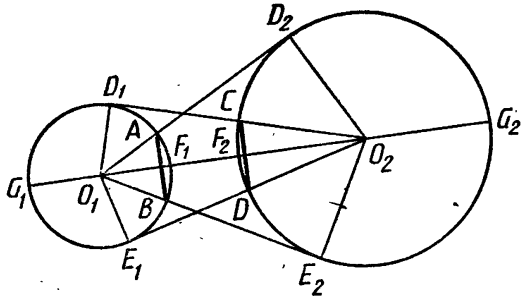



Рис. 61

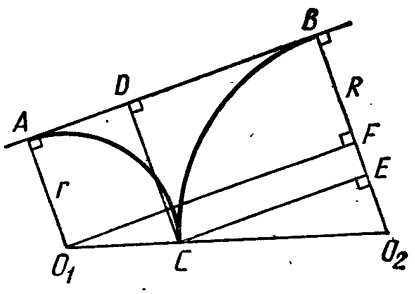



Рис. 62

общий. Из пропорции $\frac{AE}{DE}=\frac{CE}{BE}$ получаем требуемое равенство $AE\cdot BE=DE\cdot CE$. Если точки пересечения секущей с окружностью совпадают, то секущая становится касательной и получаем $AE\cdot BE=ET^2$.

**33.** Обратимся к рисунку 60. Требуется определить, как можно выразить радиус $\rho$ через радиусы $r$ и $R$.

Составляем, исходя из подобия треугольников $OA_2O_2$ и $OA_1O_1$, пропорцию: $\frac{\rho}{r}=\frac{OO_2}{OO_1}$, а исходя из подобия треугольников $OA_3O_3$ и $OA_1O_1$ — пропорцию $\frac{R}{r}=\frac{OO_3}{OO_1}$. Воспользовавшись тем, что $OO_2=OO_1+r+\rho$ и $OO_3=OO_1+r+2\rho+R$, получаем: $\frac{\rho}{r}=$ $=1+\frac{r+\rho}{OO_1}$ и $\frac{R}{r}=1+\frac{r+2\rho+R}{OO_1}$. Исключив из этих равенств $OO_1$, устанавливаем справедливость соотношения $\left(\frac{\rho}{r}-1\right)\frac{1}{r+\rho}=$ $=\left(\frac{R}{r}-1\right)\frac{1}{r+2\rho+R}$, откуда следует, что $\rho=\sqrt{Rr}$.

**34.** Пусть радиус первой окружности равен $R_1$, второй $R_2$. Проведем дополнительные построения, которые показаны на рисунке 61. Воспользуемся осевой симметрией фигуры (осью является прямая $O_1O_2$). Рассмотрим треугольник $O_1O_2D_2$ и ему подобный. Имеем:

$$\frac{\frac{AB}{2}}{R_1}=\frac{R_2}{O_1O_2};\quad AB=\frac{2R_1R_2}{O_1O_2}.$$

Рассмотрим треугольник $O_1O_2D_1$ и ему подобный. Имеем:

$$\frac{\frac{CD}{2}}{R_2}=\frac{R_1}{O_1O_2};\quad CD=\frac{2R_1R_2}{O_1O_2}.$$

Значит, $AB=CD$.

**35.** Искомое расстояние представляет отрезок $DC$ (рис. 62). Ясно, что $DC = BE = BF + FE = r + FE$.

Таким образом, задача сводится к отысканию величины отрезка $FE$. $O_2F = R - r$. Воспользуемся подобием треугольников $O_1O_2F$ и $O_2CE$. Из него следует, что $\frac{R - r - EF}{R} = \frac{R - r}{R + r}$, откуда $EF = \frac{Rr - r^2}{R + r}$. Поэтому $DC = BE = r + \frac{Rr - r^2}{R + r} = \frac{2Rr}{R + r}$.

**36.** Проведем прямую $AM$ (рис. 63), где $M$ — середина стороны $BC$. Всевозможные положения точки $P$ для разных прямоугольников $DEFK$ — на прямой $AM$. Действительно, треугольники $BAC$ и $DAE$ подобны, поэтому $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$. Треугольники $MAC$ и $PAE$ тоже подобны: $\frac{PE}{MC} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Но $MC = \frac{1}{2} BC$. Откуда $PE = \frac{1}{2} DE$ для любого положения точки $P$.

Проведем далее из вершины $A$ треугольника перпендикуляр к его основанию. Пусть точка $I$ — середина этого перпендикуляра. Покажем, что отрезок $MI$ представляет собой искомое геометрическое место точек. Действительно, треугольники $MPS$ и $MAH$ подобны, треугольники $MOS$ и $MIH$ тоже подобны. Далее проводим рассуждение, аналогичное тому, которое было выполнено выше для доказательства, что всевозможные положения точки $P$ — на прямой $AM$. Только теперь роль прямой $AM$ играет прямая $AI$, роль точки $P$ — точка $O$.

**37.** Возьмем на стороне $AB$ угла $BAC$ (рис. 64) произвольно точку $D$. Проведем луч $DM$. Выберем на этом луче точку $E$ так, чтобы отношение $DM : ME$ равнялось данному. Через точку $E$ проведем прямую, параллельную $AB$. Точку пересечения этой прямой с $AC$ обозначим через $F$. Проведем, наконец, из точки $F$ луч $FM$ до пересечения с прямой $AB$ в точке $N$. Треугольники $DNM$ и $CME$ подобны. Поэтому отношение длин отрезков $NM : MF$ равно данному отношению $DM : ME$.

**38.** Замечаем, что $a > AP$, $a > BQ$ и $a > CR$ (рис. 65). Проведем $OX$ параллельно $AB$, $OY$ параллельно $AC$, $XK$ параллельно $OR$ и $YL$ параллельно $OQ$, причем точки $X$ и $Y$ находятся на $BC$, $K$ — на

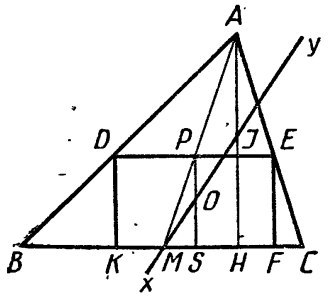



Рис. 63

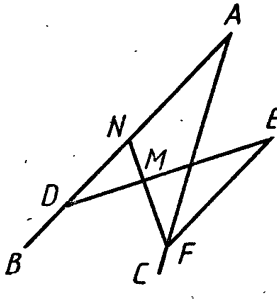



Рис. 64

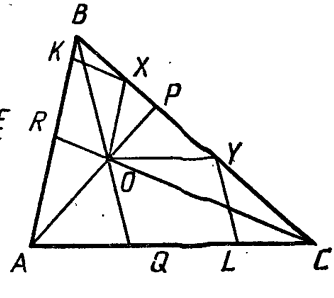



Рис. 65

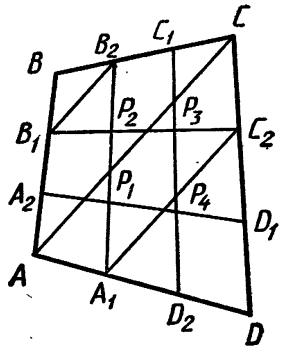



Рис. 66

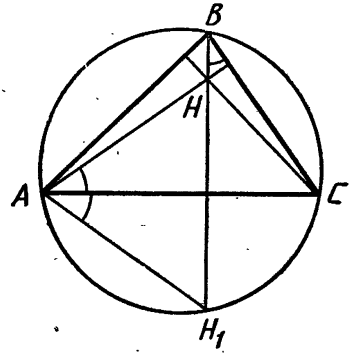



Рис. 67

$AB$, $L$ — на $AC$. Из пар подобных треугольников $OXY$ и $ABC$, $BXK$ и $BCR$, $CYL$ и $BCQ$ получаем: $XY > OP$, $BX > XK = OR$, $YC > YL = OQ$. Следовательно, $a = BX + XY + YC > OP + OR + OQ$.

**39.** Проведем отрезки $B_1B_2$, $AC$ и $A_1C_2$ (рис. 66). Из подобия треугольников $ABC$ и $B_1BB_2$ следует, что $B_1B_2 = \frac{1}{3} AC$. Точно так же из подобия треугольников $ADC$ и $A_1DC_2$ следует, что $A_1C_2 = \frac{2}{3} AC$. Треугольники $B_1P_2B_2$ и $A_1P_2C_2$ подобны: прямые $B_1B_2$ и $A_1C_2$ параллельны, поэтому угол $B_2B_1P_2$ равен углу $A_1C_2P_2$, а угол $P_2A_1C_2$ равен углу $B_1B_2P_2$. Следовательно, $\frac{B_1P_2}{P_2C_2} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, откуда получаем, что действительно $B_1P_2 = \frac{1}{3} B_1C_2$.

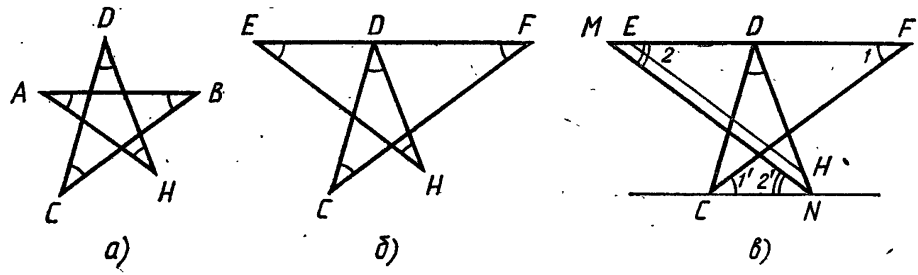
Замечание. Отрезок $B_1P_2$ выбирался нами достаточно произвольно. Вместо него можно было взять, например, отрезок $B_2P_2$ и тем же способом доказать, что он равен одной трети отрезка $A_1B_2$, или что отрезок $P_3C_2$ равен одной трети отрезка $B_1C_2$.

**40.** Пусть точка $H$ — ортоцентр данного треугольника и точка $H_1$ симметрична $H$ относительно стороны $AC$. Проведем отрезок $AH_1$ (рис. 67). Углы $HAC$ и $CAH_1$ равны, кроме того, равны углы $HAC$ и $HBC$ (вследствие перпендикулярности их сторон). Поэтому равны углы $H_1AC$ и $H_1BC$. А это означает, что четыре точки $H_1$, $A$, $B$, $C$ лежат на одной окружности.

Точно так же доказывается, что и зеркальные отражения ортоцентра относительно двух других сторон того же треугольника принадлежат описанной около него окружности.

## 8 класс

**41.** Преобразуем данный пятиугольник в другой многоугольник, сумма углов которого будет такой же, как и у данного пятиугольника. Этого можно достичь, перенося последовательно параллельно самим себе прямые, на которых лежат стороны пятиугольника. Построение видно из рисунка 68. Здесь $EF \parallel AB$, $CN \parallel EF$, $MN \parallel EH$,




а) б) в)

Рис. 68

Поэтому $\angle 1 = \angle 1'$; $\angle 2 = \angle 2'$ и сумма всех пяти углов данного пятиугольника равна сумме углов треугольника $CDN$, т. е. равна 180°.

Эту же задачу можно решить по-другому. Сумма внешних углов выпуклого пятиугольника, отсчитываемых против движения часовой стрелки, равна сумме внешних углов пятиугольника, отсчитываемых по движению часовой стрелки, и равна 360°. Следовательно, сумма всех внешних углов выпуклого пятиугольника равна 720°. В звездчатом пятиугольнике, посредине его, расположен выпуклый пятиугольник, к которому пристроены треугольники. Внешние углы выпуклого пятиугольника представляют собой углы при основаниях треугольников. Сумма всех углов этих треугольников равна $180° \cdot 5 = 900°$. Поэтому на долю углов звездчатого пятиугольника приходится $900° - 720° = 180°$.

**42.** Согласно условию задачи углы $ABB_1$, $B_1BC$, $ACB$ равны (рис. 69). Пусть величина любого из этих углов равна $\alpha$. Тогда угол $BAB_1$ равен $\frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, с другой стороны, он же равен $180° - 3\alpha$. Отсюда $\frac{5}{2}\alpha = 90°$, $\alpha = 36°$. Следовательно, угол $B$ равен 72°, угол $C$ равен 36°, угол $A = 72°$.

**43.** Введем в рассмотрение векторы $\overline{AB} = \bar{r}_C$, $\overline{BC} = \bar{r}_A$, $\overline{CA} = \bar{r}_B$. Видим, что $\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_C = \bar{0}$. Пусть теперь $\overline{AA_1} = \frac{1}{n}\bar{r}_A + \bar{r}_B$, $\overline{BB_1} = \frac{1}{n}\bar{r}_B + \bar{r}_C$, $\overline{CC_1} = \frac{1}{n}\bar{r}_C + \bar{r}_A$. Сумма векторов $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$ равна нулевому вектору: $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times (\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_C) = 0$. Поэтому из векторов $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ можно составить треугольник.

**44.** Достраиваем равнобедренный треугольник $ADC$ до ромба $ADCE$, соединяем точки $B$ и $E$ отрезком прямой (рис. 70). В треугольнике $BEC$ стороны $BC$ и $CE$ равны по построению, а угол $BCE$ равен 60°. Следовательно, этот треугольник равносторонний. Треугольник $ABE$ равнобедренный ($AE = BE$). Угол $BEA$ равен $140° - 60° = 80°$. Поэтому угол $BAE$ равен $\frac{180° - 80°}{2} = 50°$ и угол $BAD$ равен

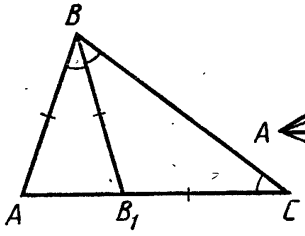



Рис. 69

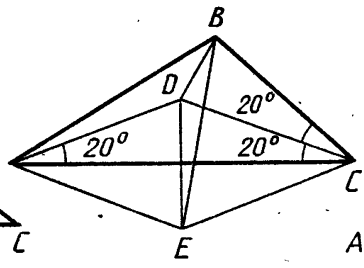



Рис. 70

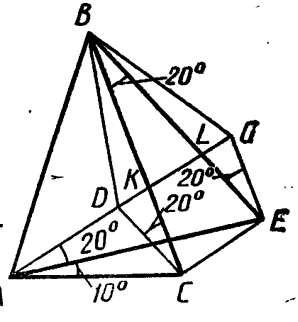



Рис. 71

$50° - 2 \cdot 20° = 10°$. Угол $ADB$, как нетрудно подсчитать, равен 140°. Поэтому угол $ABD$ равен $180° - 140° - 10° = 30°$.

**45.** Приводимое здесь решение сводится к построению симметричной фигуры пятиугольника, в которую данный треугольник входит как составная часть. В нашем случае основой для такой фигуры может послужить равносторонний треугольник $ABE$ (рис. 71). Из его вершины $E$ проводим отрезок прямой $EG$ под углом 20° к $BE$ до пересечения в точке $G$ с продолжением отрезка $AD$ и отрезки $EC$ и $BG$. В результате пятиугольник $ABGEC$ построен. Треугольник $CBE$ равнобедренный (по построению $BC = BE$), и $\angle CBE$ равен $60° - \angle ABC = 60° - 40° = 20°$; $\angle BEC = 80°$ и $\angle AEC = 80° - \angle BEA = 80° - 60° = 20°$. Следовательно, $CE \parallel AG$. Кроме того, по построению $GE \parallel BC$. Поэтому четырехугольник $KGEC$ — параллелограмм. Покажем, что он является ромбом. Для этого убедимся, что треугольники $CBE$ и $GAE$ равны. В самом деле, по построению $AE = BE = BC$, $\angle AEG = 60° + \angle BEG = 60° + 20° = 80°$. Треугольники $GAE$ и $CBE$ равны (по стороне и двум прилежащим углам). Значит, $CE = GE$ и параллелограмм $KGEC$ — ромб. Треугольники $EAC$ и $EBG$ равны по двум соответственным сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle GBE = 10°$. Наконец, нетрудно показать, что треугольники $DKC$ и $LEG$ равнобедренные и равные. Поэтому равны треугольники $DBC$ и $GBE$. Значит, искомый $\angle DBC = 10°$.

**46.** Так как $b > a$, то $AB_1 = b - a > 0$ (поэтому точка $B_1$ находится на стороне $AC$, а не на ее продолжении). Далее, $BC_1 = c - (b - a) = a - b + c > 0$ (в силу того, что $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника), $A_1C = a - (a - b + c) = b - c > 0$ и, наконец, $AB_2 = b - (b - c) = c$, а это означает, что дуга $AB_2$ пройдет через вершину $B$ данного треугольника.

**47.** Пусть радиус полуокружности, описанной около треугольника $ABC$, равен $r$, радиус полуокружности, построенной на катете $AB$, равен $r_1$, а радиус полуокружности, построенной на катете $BC$, — $r_2$. Тогда ширина луночки, соответствующей катету $AB$, равна $r_1 + r_2 - r$ (рис. 72). Ширина луночки, соответствующей катету $BC$, также равна $r_1 + r_2 - r$, что и требовалось доказать.

**48.** Сумма углов четырехугольника равна 360°. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то сумма двух

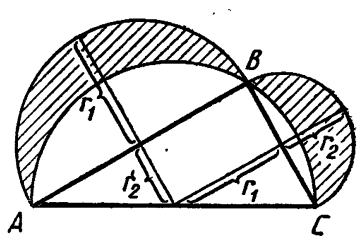



Рис. 72

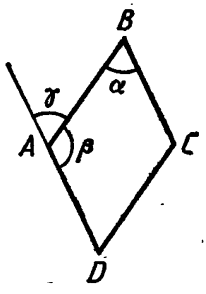



Рис. 73

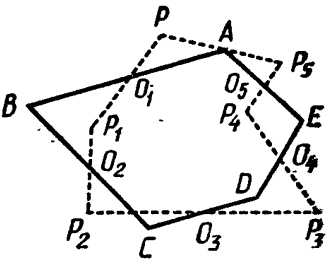



Рис. 74

его соседних углов равна 180°, $\alpha + \beta = 180°$ (рис. 73) и $\beta + \gamma = 180°$. Следовательно, углы $\gamma$ и $\alpha$ равны. Поэтому $AD \parallel BC$. Аналогично показываем, что $AB \parallel DC$.

**49.** Обратимся к рисунку 74. На нем положение точек $A, B, C, D, E$ первоначально предполагается неизвестным. Взяв произвольно точку $P$, можем получить для нее центрально-симметричную точку $P_1$ (центром симметрии явится точка $O_1$). Тогда фигура $BPAP_1$ будет параллелограммом (на рисунке этот параллелограмм не нанесен). Следовательно, отрезок $BP_1$ должен быть параллелен и равен отрезку $PA$. Точно так же построим точку $P_2$, симметричную точке $P_1$ относительно точки $O_2$, и заметим, что отрезки $BP_1$ и $P_2C$ равны и параллельны. Продолжая построения дальше, получим: $P_4E = AP_5$, $P_4E \parallel AP_5$, значит, отрезки $PA$ и $AP_5$ равны и лежат на одной прямой. Отсюда единственным образом определяется положение точки $A$ — середина отрезка $PP_5$ (в первом параллелограмме $BPAP_1$ диагональю служит отрезок $AB$ и т. д., в последнем — отрезок $EA$).

Найдя положение точки $A$, затем найдем центрально-симметричную ей относительно $O_1$ точку $B$ и, продолжая этот процесс, получим все пять вершин пятиугольника.

**50.** Соединим отрезком прямой точку $A$ с центром данной окружности $O$ и на отрезке $OA$ как на диаметре построим окружность (рис. 75). Проведем еще одну окружность с центром в точке $A$ и радиусом $\frac{m}{2}$. Через точку $B$ пересечения этих окружностей и точку $A$ проведем хорду $ED$ (таких точек две, отсюда и два решения). Убедимся, что эта хорда удовлетворяет условию задачи. Отрезок $OB$ перпендикулярен хорде $ED$, поэтому $EB = BD$. Хорду $ED$ можно рассматривать как состоящую из четырех отрезков $BD$, $AB$, $AC$ и $CE$, два из которых имеют равную длину ($AC$ и $AB$). Поэтому $AD = BD + \frac{m}{2}$, $AE = BE - \frac{m}{2} = BD - \frac{m}{2}$. Следовательно, $AD - AE = m$.

**51.** Полученная фигура $ABCD$ (рис. 76) представляет собой прямоугольник, поскольку по построению все углы между соседними сторонами прямые. Кроме того, равнобедренные прямоугольные треугольники $EDH$ и $FBG$ равны, поскольку у них равны гипотенузы. Следовательно, $DE = FB$. Треугольник $ECF$ равнобедренный и пря-

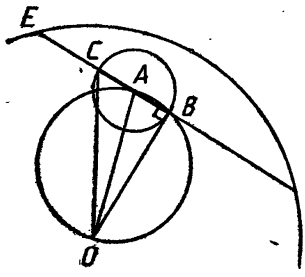



Рис. 75

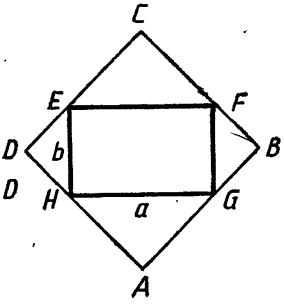



Рис. 76

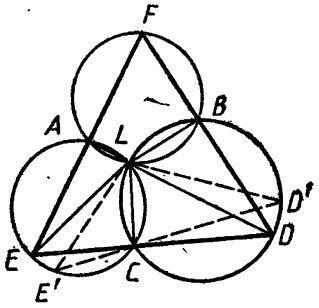



Рис. 77

моугольный. Поэтому $EC = CF$. Значит, $DC = CB$. Следовательно, $ABCD$ — квадрат.

Сторона полученного квадрата равна сумме двух отрезков: $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{2}}$. Поэтому его площадь равна $\frac{(a+b)^2}{2}$.

52. Проведем окружность через точки $A$ и $B$ так, чтобы $\angle AFB = 60°$ (точка $F$ занимает положение на дуге этой окружности). Для этого на отрезке $AB$ как на основании строим равносторонний треугольник $ABF$ и описываем около него окружность. Аналогичным образом проводим окружности через пары точек $B$, $C$ и $C$, $A$. Эти три окружности пересекаются в одной точке $L$ (рис. 77). В самом деле, предположим противное. Пусть дуги окружностей, стягиваемые хордами $AB$ и $BC$ и содержащие каждая одну треть окружности, пересекаются в некоторой точке $L'$. Тогда сумма углов $AL'B$ и $BL'C$ равна 240°. Значит, угол $AL'C$ равен 120°. Следовательно, точка $L'$ принадлежит дуге, стягиваемой хордой $AC$. Итак, предположение о том, что три дуги не пересекаются в одной точке $L$, оказалось ложным. Проведем отрезки $LA$, $LB$ и $LC$. Построим треугольник $DEF$, стороны которого проходят через точки $A$, $B$ и $C$ и перпендикулярны соответственно отрезкам $LA$, $LB$ и $LC$. Этот треугольник является искомым. Действительно, то, что он равносторонний, очевидно. Покажем, что его сторона наибольшая из возможных. Для этого рассмотрим другой треугольник со стороной $E'D'$, проходящей через точку $C$. Тогда треугольник $E'D'L$ подобен треугольнику $EDL$. Но поскольку $EL$ и $DL$ — диаметры, то хорды $E'L$ и $D'L$ короче их, а потому $E'D' < ED$, что и требовалось доказать.

53. Предположим, что требуемое построение выполнено: $ABCD$ — данный четырехугольник, $PQRS$ — искомый квадрат, причем точка $A$ принадлежит отрезку прямой $PQ$, точка $B$ — отрезку $QR$, точка $C$ — отрезку $RS$, точка $D$ — отрезку $PS$. Проведем в данном четырехугольнике диагонали $AC$ и $BD$. Кроме того, проведем из точки $A$ перпендикуляр к $BD$ до пересечения с $RS$ в точке $E$ и $AF \perp SR$ (точка $F$

принадлежит прямой $SR$) и $DG \perp QR$ (точка $G$ принадлежит прямой $QR$).

Рассмотрим треугольники $EAF$ и $BDG$. Они равны, поскольку, будучи прямоугольными, имеют по равной стороне ($DG = AF$) и равному соответственному острому углу ($\angle EAF = \angle BDG$, так как их стороны взаимно перпендикулярны). Отсюда получаем, что $AF = DG$ и $AE = BD$. Воспользуемся последним равенством. На перпендикуляре, проведенном к $BD$ из точки $A$, откладываем от $A$ отрезок, равный $BD$. Получаем точку $E$. Через точки $E$ и $C$ проводим прямую. Через точку $A$ проводим прямую, параллельную $EC$, через точки $B$ и $D$ проводим прямые, перпендикулярные двум полученным. Точки пересечения $P$, $Q$, $R$ и $S$ этих прямых являются вершинами искомого квадрата.

**54.** На рисунке 78 основаниями перпендикуляров являются точки $A_1$, $B_1$, $C_1$. Проведем отрезки $MA$ и $MB$. Утверждение о том, что три точки $A_1$, $C_1$, $B_1$ лежат на одной прямой, будет доказано, если удастся доказать, что $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$. Четырехугольник $AMBC$ вписанный. Поэтому сумма двух его противоположных углов, например $A$ и $B$, равна 180°. Но $\angle MBC + \angle MBA_1 = 180°$. Следовательно, $\angle MBA_1 = \angle MAB_1$. Прямоугольные треугольники $AMB_1$ и $A_1MB$ подобны, и $\angle A_1MB = \angle AMB_1$. Заметим теперь, что около четырехугольников $AB_1C_1M$ и $A_1BC_1M$ можно описать окружность (в четырехугольнике $AB_1C_1M$ равны углы $AB_1M$ и $AC_1M$, а в четырехугольнике $A_1BC_1M$ сумма противоположных углов $MA_1B$ и $MC_1B$ равна 180°). В первой из этих окружностей равны как вписанные и опирающиеся на общую дугу углы $AMB_1$ и $AC_1B_1$, во второй по той же причине равны углы $A_1MB$ и $A_1C_1B$. Следовательно, равны углы $A_1C_1B$ и $AC_1B_1$, что и требовалось показать.

**55.** Пусть точка $G$ — середина отрезка $CF$, а точка $K$ — середина отрезка $ED$ (рис. 79). Треугольники $ESD$ и $CSF$ подобны, а $SK$ и $SG$ — их соответствующие медианы. Отсюда получаем равенство углов: $\angle MGS = \angle SKN$. Проведем отрезки $MO$ и $NO$. Используя только что полученное равенство, можно доказать, что $\angle NOS =$

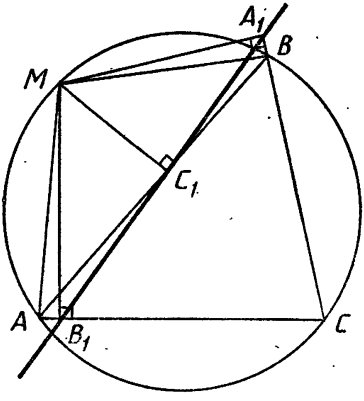



Рис. 78

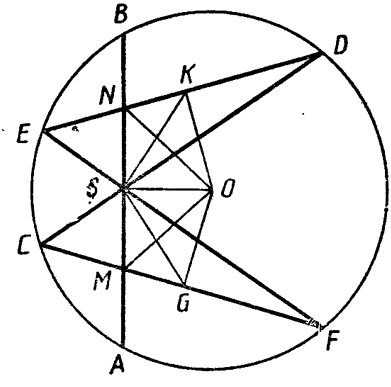



Рис. 79

$= \angle MOS$. Тогда получается, что прямоугольные треугольники $SNO$ и $SMO$ равны (сторона $SO$ общая, углы $NOS$ и $MOS$ равны). Следовательно, равны отрезки $MS$ и $NS$.

**56.** Точка $M$ находится на одинаковых расстояниях от прямых $AP$ и $AB$. Поэтому она лежит на биссектрисе угла $A$. Точно так же она лежит на биссектрисе угла $B$. Проведем отрезки прямых $AM$, $MP$ и $MB$. Угол $APB$ равен разности $\pi - (\angle PAB + \angle PBA) = \pi - 2(\angle MAB + \angle MBA)$. Величина угла $AMB$ постоянная, следовательно, постоянной является и сумма углов в скобке. Значит, величина угла $APB$ также есть величина постоянная; и поэтому точка $P$ лежит на дуге окружности, проходящей через точки $A$ и $B$, расположенной в той же полуплоскости, относительно прямой $AB$, что и дуга $AB$.

**57.** Поскольку $AC$ и $BD$ равны, то и меньшие дуги, стягиваемые этими хордами, равны (рис. 80). Поэтому равны вписанные углы $BAD$ и $CDA$. С другой стороны, поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, то сумма противоположных углов $ABC$ и $ADC$ равна 180°. Значит, сумма углов $ABC$ и $BAD$ равна 180° и прямая $BC$ параллельна прямой $AD$. Получаем, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция. А трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная (это следует, например, из симметрии треугольников $ABD$ и $ACD$).

**58.** Проведем через точку $A$ прямую $AE$ параллельно $BD$ (рис. 81). Тогда углы $EAC$ и $DO_1C$ равны. Следовательно, угол $DO_1C$, равный углу $EAC$, можно измерять половиной дуги $EDC$ или полусуммой дуг $DC$ и $AB$. Но углы $AO_1B$ и $DO_1C$ равны как вертикальные. Поэтому угол $AO_1B$ измеряется полусуммой дуг $AB$ и $DC$.

**59.** $AC$ — касательная к данной окружности, хорда $AB$ — часть данной секущей (рис. 82). Проведем через точку $B$ прямую $BD$, параллельную $AC$. Тогда угол $ABD$ равен углу $BAC$. Треугольник $DAB$ равнобедренный, поэтому дуга $AB$ равна дуге $AD$. Следовательно, угол $BAC$ можно измерить половиной дуги $AB$.

**60.** Пусть угол, о котором говорится в условии задачи, есть угол $ABC$ на рисунке 83. Проведем прямую $EF$, параллельную стороне $AB$. Углы $ABC$ и $FEC$ равны. Последний измеряется половиной дуги $FC$. Но дуга $FC$ равна разности дуг $AC$ и $AF$. Дуга же $AF$ вследствие

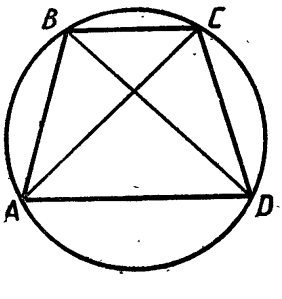



Рис. 80

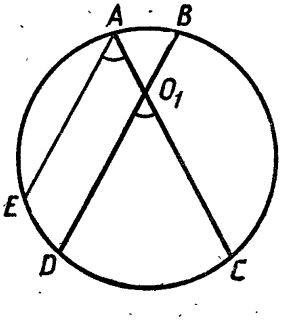



Рис. 81

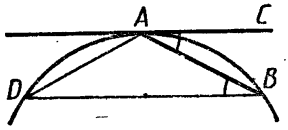



Рис. 82

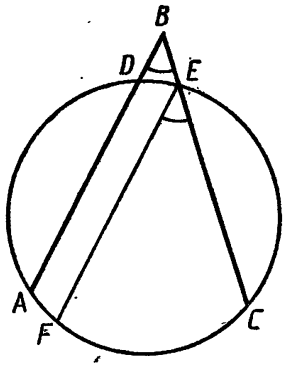



Рис. 83

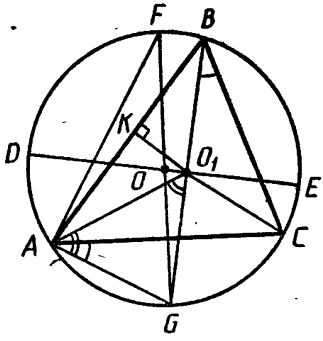



Рис. 84

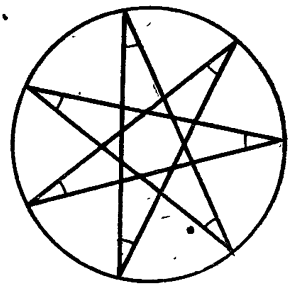


Рис. 85

параллельности $AD$ и $FE$ равна дуге $DE$. Поэтому данный угол $ABC$ измеряется полуразностью дуг $AC$ и $DE$.

**61.** Пусть точка $O_1$ — центр вписанной в данный треугольник $ABC$ окружности, а точка $O$ — центр описанной около него окружности. Проведем диаметр $DE$ описанной окружности через точки $O$ и $O_1$. Проведем также диаметр описанной окружности $FG$, перпендикулярный стороне $AC$ данного треугольника. Тогда точка $G$ (рис. 84) — середина дуги $AC$. Поэтому отрезок прямой $BG$ является биссектрисой угла $ABC$. Проведем еще дополнительно отрезок прямой $AG$ и рассмотрим треугольник $AGO_1$. Угол $AO_1G$ равен полусумме углов $A$ и $B$ треугольника $ABC$, поскольку является внешним углом для треугольника $AO_1B$. Вписанный угол $CAG$ опирается на ту же дугу $GC$, что и вписанный угол $GBC$, и поэтому равен $\frac{B}{2}$. Следовательно, угол $GAO_1$ также равен $\frac{1}{2}(A + B)$. Итак, треугольник $AGO_1$ равнобедренный, причем $AG = GO_1$.

Проведем из $O_1$ перпендикуляр $O_1K$ к стороне $AB$ и отрезок прямой $AF$. Замечаем, что треугольники $KBO_1$ и $AFG$ подобны, причем $KO_1 = r$, $GF = 2R$, где $r$ — радиус вписанной окружности, $R$ — радиус описанной окружности. Поэтому $\frac{r}{BO_1} = \frac{AG}{2R}$. Но $AG = GO_1$ и $r \cdot 2R = GO_1 \cdot BO_1 = DO_1 \cdot O_1E = (R + OO_1)(R - OO_1) = R^2 - OO_1^2$. Поэтому $OO_1 = \sqrt{R(R - 2r)}$, $R - 2r = \frac{OO_1^2}{R} \geqslant 0$, откуда и вытекает, что в треугольнике радиус описанной окружности не меньше, чем диаметр вписанной.

**62.** Покажем, что ответ на поставленный вопрос отрицательный. Суммы углов звездчатых семиугольников не обязательно равны между собой. Например, сумма углов звездчатого вписанного семиугольника, приведенного на рисунке 85, равна 180°, потому что дуги, на которые опираются его углы, в сумме составляют целую окружность. Углы звездчатого семиугольника на рисунке 86 измеряются перекры-

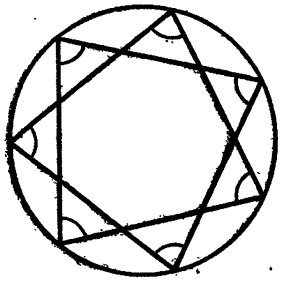


Рис. 86

вающими окружность дугами. Поэтому сумма их углов больше 180°.

**63.** Рассмотрим точку внутри произвольного четырехугольника. Стороны данного четырехугольника видны из нее под углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$. Сумма этих углов должна равняться 360°. Предположим теперь, что найдется точка четырехугольника, не покрытая кругами. Тогда любая из сторон четырехугольника будет видна из нее под острым углом. А сумма четырех острых углов не может равняться 360°. Полученное противоречие и доказывает утверждение, высказанное в условии задачи.

**64.** Для того чтобы доказать высказанное в условии утверждение, достаточно установить, что в данном четырехугольнике $ABCD$ сумма двух противоположных углов, например $\angle A + \angle C$, равна 180°. Пусть $O$ — центр вписанной окружности (рис. 87), $R$ — точка пересечения хорд $MP$ и $NQ$. Поскольку углы $\angle MRN$ и $\angle PRQ$ прямые, то сумма длин дуг $PQ$ и $MN$ равна половине окружности. Следовательно, сумма центральных углов $\angle MON + \angle POQ = 180°$. Замечаем теперь, что поскольку углы $\angle AMO$, $\angle ANO$, $\angle CPO$ и $\angle CQO$ прямые, то $\angle A = 180° - \angle MON$, $\angle C = 180° - \angle POQ$. Следовательно, $\angle A + \angle C = 360° - (\angle MON + \angle POQ) = 360° - 180° = 180°$, что и требовалось.

**65.** Замечаем, что сумма дуг $BC'$, $BA'$ и $AB'$ равна 180°. А угол $C'TA'$ (рис. 88) измеряется полусуммой этих дуг. Следовательно, он прямой.

**66.** Опишем сначала окружности около треугольников $BFC$ и $ACD$. Эти окружности пересекаются в двух точках. Одна из них — точка $C$, другую назовем точкой $G$ и покажем в дальнейшем, что она и есть искомая. Начнем с выяснения того факта, что окружность, описанная около треугольника $ABE$, проходит через точку $G$ (рис. 89). Замечаем, что $\angle FBG = \angle FCG$ как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу $FG$. Но $\angle FCG = \angle DCG$ и $\angle DAG = \angle EAG$. Проведем

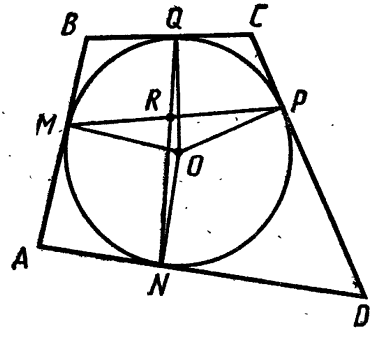



Рис. 87

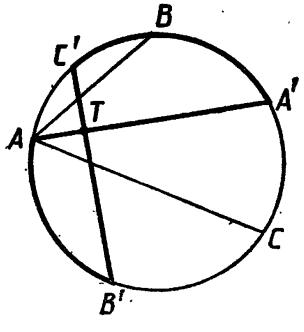



Рис. 88

отрезок прямой $EG$. Опирающиеся на него, как на хорду, углы $EAG$ и $EBG$ равны. Следовательно, четыре точки $A$, $B$, $G$ и $E$ лежат на одной окружности, т. е. окружность, описанная около треугольника $ABE$, действительно проходит через точку $G$. Остается показать теперь, что и окружность, описанная около треугольника $DEF$, проходит через точку $G$. Проведем отрезок прямой $DG$. Нам теперь достаточно установить, что $\angle FEG = \angle GDF$. Проведем еще вспомогательный отрезок $FG$. Теперь, как это видно из рисунка, $\angle BAG = \angle CDG$. Следовательно, равны между собой углы $FDG$ и $FEG$. Поэтому окружность, описанная около треугольника $DEF$, действительно проходит через точку $G$.

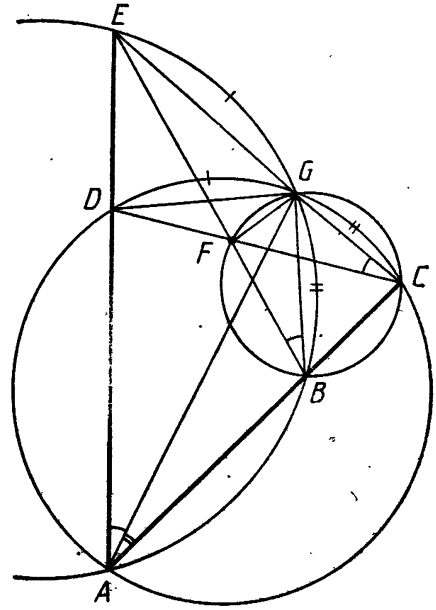



Рис. 89

**67.** Какой бы из удовлетворяющих условию задачи параллелограммов вида $AFGB$ мы ни выбрали, у всех этих параллелограммов площади равны. То же самое справедливо относительно параллелограммов вида $BKLC$. Мы вправе выбрать из параллелограммов указанного вида такие, для которых задачу решить проще. Пусть $BK$ совпадает при нашем выборе с $BG$ (это возможно, и тогда $CE$ и $AD$ равны и параллельны по условию). В результате получаем фигуру, изображенную на рисунке 90. Поскольку $ADEC$ — параллелограмм, то $DE = AC$. Треугольники $ABC$ и $DGE$ имеют соответственно параллельные стороны; про одну пару их соответственных сторон известно, что они равны. Следовательно, треугольники эти равны. Пусть $DE$ пересекает $AB$ в точке $P$ и $BC$ — в точке $Q$. Сумма площадей трапеций $DPBG$ и $GBQE$ равна площади треугольника $ABC$ минус площадь треугольника $PBQ$. Такая же величина у площади трапеции $APQC$. Следовательно, площадь трапеции $APQC$ равна сумме площадей трапеций $DPBG$ и $GBQE$. Объединяя трапецию $APQC$ с треугольниками $ADP$ и $QEC$, получаем параллелограмм $ADEC$, площадь которого равна сумме площадей параллелограммов $ADGB$ и $BGEC$.

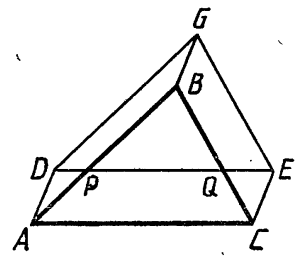



Рис. 90

**68.** На рисунке 91 треугольник $CAC'$ равнобедренный по построению, $AC = AC'$. Покажем, что угол $CAC'$ прямой. Для этого достаточно убедиться, что $AC^2 + AC'^2 = CC'^2$. Но $AC^2 + AC'^2 = 2(2^2 + 1^2) = 10$. С другой сто-

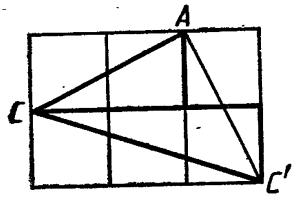


Рис. 91

роны, $CC'^2 = 3^2 + 1^2 = 10$. Поскольку треугольник равнобедренный и прямоугольный, то $\angle ACC' = 45°$.

**69.** Как известно, сумма двух векторов представляется в виде вектора, длина которого равна той диагонали параллелограмма, которой принадлежит их общее начало — в нашем случае точка $C$. Если диагональ эта одновременно является биссектрисой угла $C$, то параллелограмм — ромб. В данном случае разложение вектора $\overline{CM}$ по направлениям $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ легко получить, зная, что искомый параллелограмм — ромб, у которого известны диагональ $\overline{CM}$ и угол $ACB$. Концы векторов-слагаемых, имеющих начало в точке $C$, составляющих в сумме $\overline{CM}$, получаются в пересечениях сторон $CA$ и $CB$ угла $ACB$ с перпендикуляром к биссекторному отрезку $CM$, проведенному через середину последнего.

**70.** Покажем сначала, что если задать ориентацию сторон правильного $2n$-угольника, скажем, против часовой стрелки, а затем векторы убрать через один, то сумма оставшихся векторов равна нулевому вектору. Действительно, предположим противное, т. е. что вектор, получающийся в результате сложения оставшихся векторов, не нулевой. Тогда, если этот вектор повернуть относительно его начала на угол, отличный от $2\pi$, то в результате получится вектор, не равный первоначальному. Повернем рассматриваемую систему векторов, оставшихся на сторонах правильного $2n$-угольника, относительно его центра так, чтобы в новом положении вектор, изображающий оставшуюся сторону правильного многоугольника, совпал с вектором, изображающим другую сторону правильного многоугольника. Ясно, что при этом угол поворота не может быть равен $2\pi$. В результате рассматриваемая система векторов самосовместится и суммарным вектором должен быть вектор, равный первоначальному суммарному вектору. А этого быть не может. Значит, суммарный вектор рассматриваемой системы векторов равен нулевому вектору. Точно так же находим, что и сумма удаленных векторов равна нулевому вектору.

Имеем: $\overline{BA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2B} = \overline{0}$, $\overline{BA_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4B} = \overline{0}$, . . ., $BA_{2n-1} + A_{2n-1}A_{2n} + A_{2n}B = \overline{0}$.

Складывая эти равенства, получаем, что

$$\overline{BA_1} + \overline{A_2B} + \overline{BA_3} + \overline{A_4B} + \ldots + \overline{BA_{2n-1}} + \overline{A_{2n}B} = \overline{0},$$

а это и означает, что, прикладывая начало вектора $\overline{A_2B}$ к концу вектора $\overline{BA_1}$, затем начало вектора $\overline{BA_3}$ к концу предыдущей векторной суммы и т.д., получим требуемую замкнутую ломаную.

**71.** Воспользуемся векторным равенством $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$. Из него получаем: $\overline{BC} = -\overline{AB} - \overline{CA}$. Следовательно, чтобы получить требуемое, достаточно доказать равенство $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + (-\overline{AB} - \overline{CA}) \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$. Записываем далее цепочку равносильных равенств.

$$\overline{AB}\cdot(\overline{CD}-\overline{AD})+\overline{CA}\cdot(\overline{BD}-\overline{AD})=\overline{AB}\cdot(\overline{CD}+\overline{DA})+$$
$$+\overline{CA}\cdot(\overline{BD}+\overline{DA})=\overline{AB}\cdot\overline{CA}+\overline{CA}\cdot\overline{BA}=\overline{CA}(\overline{AB}+\overline{BA})=\overline{CA}\cdot 0=0.$$

Заключаем, раз последнее из них справедливо, то справедливо и первое, что и требовалось.

**72.** Предположим, что нам известно, что точка $O$, удовлетворяющая условию задачи, существует. Позднее, указав способ ее построения, мы тем самым докажем ее существование. Предположим далее, что известны углы $BOA$ и $BOC$. Тогда можно построить дуги окружностей, стягиваемые хордами $AB$ и $BC$, вмещающие углы $AOB$ и $BOC$. Пересечение этих дуг определит точку $O$ единственным образом. Из треугольника $OBC$ $\angle BOC=\pi-\angle OBC-\angle OCB$. По условию $\angle OBC=\angle OCA$. Поэтому $\angle BOC=\pi-\angle OCA-\angle OCB=$ $=\pi-C$. Точно так же получаем, что $\angle COA=\pi-A$, $\angle AOB=$ $=\pi-B$. Теперь можно построить дуги, вмещающие углы $BOC$ и $BOA$. Их пересечение и определяет положение точки $O$. Нетрудно убедиться, что при таком получении точки $O$ угол $AOC$ составит $\pi-A$, что и требуется.

**73.** Площадь данного четырехугольника $S(P_1P_2P_3P_4)$ равна

$$\frac{1}{2}(a_1a_2\sin P_1P_2P_3+a_3a_4\sin P_1P_4P_3)=$$
$$=\frac{1}{2}(a_1a_2\sin P_1P_2P_3+a_3a_4\sin(180^\circ-\angle P_1P_2P_3))=$$
$$=\frac{1}{2}(a_1a_2+a_3a_4)\sin P_1P_2P_3.$$

Аналогично выводим равенство

$$S(P_1P_2P_3P_4)=\frac{1}{2}(a_2a_3+a_1a_4)\sin P_2P_1P_4.$$

Следовательно, $\dfrac{a_1a_2+a_3a_4}{a_2a_3+a_1a_4}=\dfrac{\sin P_1P_2P_3}{\sin P_2P_1P_4}$.

Из треугольника $P_1P_2P_3$ по теореме синусов находим: $\dfrac{f}{\sin P_1P_2P_3}=$ $=\dfrac{a_1}{\sin P_1P_3P_2}$, а из треугольника $P_1P_2P_4$: $\dfrac{e}{\sin P_2P_1P_4}=\dfrac{a_1}{\sin P_1P_4P_2}$. Замечаем, что $\angle P_1P_4P_2=\angle P_1P_2P_3$, так как оба эти угла, вписанные в одну и ту же окружность, опираются на одну и ту же ее дугу $P_1P_2$. Следовательно, $\dfrac{f}{\sin P_1P_2P_3}=\dfrac{e}{\sin P_2P_1P_4}$ и $\dfrac{\sin P_1P_2P_3}{\sin P_2P_1P_4}=\dfrac{f}{e}$, что и нужно было установить.

**74.** Дважды воспользовавшись теоремой косинусов (рис. 92), получаем два равенства

$$CK^2=p^2+a^2-2ap\cos\alpha,$$
$$CK^2=p^2+b^2-2bp\cos\alpha,$$

из которых следует исключить $\cos\alpha$. Умножим для этого первое из них на $b$, второе — на $a$ и вычтем из первого второе. Получим: $(b-a)CK^2=p^2(b-a)+a^2b-b^2a$, откуда $CK=\sqrt{p^2-ab}$.

**75.** Проведем биссектрису $AA_1$ угла $A$ (рис. 93). Она разделит сторону $BC$ на отрезки $BA_1$ и $A_1C$, длины которых относятся между

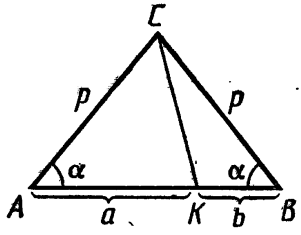



Рис. 92

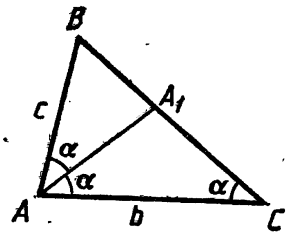



Рис. 93

собой как $c : b$. Обозначим для удобства длину $BA_1$ буквой $x$, длину $A_1C$ буквой $y$. Тогда $x + y = a$.

Из того что $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$, следует, что $y = \frac{b}{c}x$ и $x + \frac{b}{c}x = a$, откуда $x = \frac{ac}{b+c}$, $y = \frac{ab}{b+c}$. Треугольник $AA_1C$ равнобедренный, поэтому $b = \frac{2ab}{b+c}\cos\alpha$, или $\cos\alpha = \frac{b+c}{2a}$.

Воспользуемся теоремой косинусов: $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2$. Подставляя значение $\cos\alpha$, получаем: $a^2 + b^2 - b(b+c) = c^2$, $a^2 - bc = c^2$, откуда $a = \sqrt{c^2 + bc}$.

**76.** Рассмотрим две соседние прямые $a$ и $b$. Прямую $a$ заключим в полосу так, чтобы она была осью симметрии полосы. Пусть ширина этой полосы равна длине стороны многоугольника, которой перпендикулярна прямая $a$. Точно так же заключим прямую $b$ в полосу, ширина которой равна длине соответствующей стороны многоугольника. Прямые $a$ и $b$ образуют острый угол или в случае, когда многоугольник — квадрат, прямой угол. Рассмотрим точку пересечения границ этих полос, расположенную внутри острого угла (таких точек 2), она (рис. 94) определит одну из вершин искомого многоугольника. Все прочие вершины будут получены последовательными преобразованиями симметрии относительно прямых $a$, $b$, $c$ и т. д.

**77.** а) Пусть $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ — точки касания данного четырехугольника с вписанной окружностью (рис. 95). $OA$ — биссектриса угла $D_1OA_1$, поэтому угол $AOB$ равен половине угла $D_1OB_1$ (правого). Точно так же угол $DOC$ равен половине угла $D_1OB_1$ (левого) и

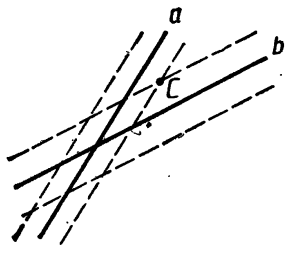



Рис. 94

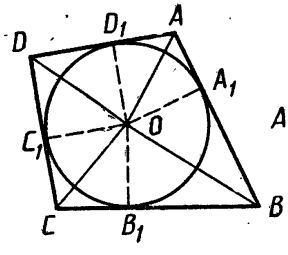



Рис. 95

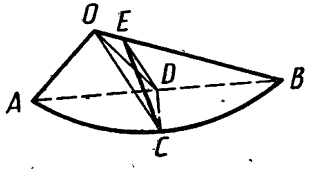



Рис. 96

сумма углов $AOB$ и $COD$ равна $360° : 2 = 180°$, что и требовалось доказать.

б) Треугольники $AOB$ и $COD$ имеют равные высоты (как радиусы вписанной окружности). Углы $AOB$ и $COD$ в сумме составляют $\pi$. Площади треугольников $AOB$ и $COD$ относятся как длины отрезков $AB$ и $CD$. Отношение этих площадей равно $\dfrac{\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin AOB}{\frac{1}{2} OD \cdot OC \cdot \sin(\pi - \angle AOB)} = \dfrac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD}$. Значит, $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD}$. Точно так же получаем равенство $\dfrac{BC}{DA} = \dfrac{OB \cdot OC}{OA \cdot OD}$. Из этих двух равенств получаем требуемое равенство $\dfrac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD} = \left(\dfrac{OA}{OC}\right)^2$.

**78.** Треугольники подобны. Значит, площадь треугольника, построенного на катете $a$, относится к площади треугольника, построенного на катете $b$, так: $\dfrac{S_a}{S_b} = \dfrac{a^2}{b^2}$ (как квадраты сходственных сторон). Точно так же площадь треугольника, построенного на гипотенузе $c$, относится к площади треугольника, построенного на катете $b$, как $\dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{S_c}{S_b}$. Поскольку данный треугольник — прямоугольный, справедливо равенство $a^2 + b^2 = c^2$, или $\dfrac{a^2}{b^2} + 1 = \dfrac{c^2}{b^2}$, или $\dfrac{S_a}{S_b} + 1 = \dfrac{S_c}{S_b}$, откуда и получаем требуемое равенство $S_a + S_b = S_c$.

**79.** Исследуемая фигура имеет вид, показанный на рисунке 96. Пусть $C$ — середина дуги $AB$. Проведем хорду $AB$ и перпендикулярно ей из точки $C$ отрезок прямой $CD$. Соединим отрезком прямой точки $O$ и $D$. Теперь криволинейные четырехугольники (с одной криволинейной стороной) $AODC$ и $CDOB$ имеют равные площади. Но нам нужно, чтобы равноделящий разрез был отрезком прямой, а не ломаной. Для этого проведем отрезок $OC$, потом параллельно ему $DE$. Соединим точки $E$ и $C$. Видим, что площади треугольников $OEC$ и $ODC$ равны. Поэтому искомым разрезом является прямая $EC$.

**80.** Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Из того что $S(ABC) = \dfrac{ab}{2} \sin B$, заключаем: $S(ABC) \leqslant \dfrac{ab}{2}$. Точно так же получаем: $S(ACD) \leqslant \dfrac{cd}{2}$, $S(ABD) \leqslant \dfrac{ad}{2}$ и $S(BCD) \leqslant \dfrac{bc}{2}$. Сложим эти неравенства: $S(ABC) + S(ACD) + S(ABD) + S(BCD) = 2S(ABCD) \leqslant \dfrac{ab + cd + ad + bc}{2} = \dfrac{(a + c)(b + d)}{2}$, или $S(ABCD) \leqslant \dfrac{a + c}{2} \cdot \dfrac{b + d}{2}$.

**81.** Пусть площадь данного квадрата равна 1. Треугольник $EFG$ расположен так, что у него общая ось симметрии с данным квадратом.

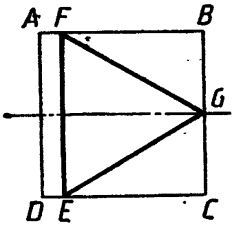



Рис. 97

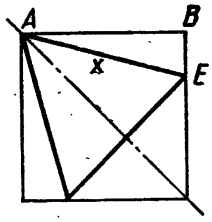



Рис. 98

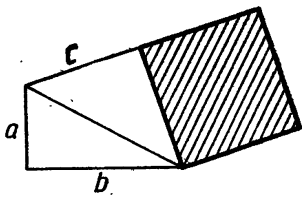



Рис. 99

Из рисунка 97 видно, что сторона равностороннего треугольника равна 1, площадь его $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Поэтому искомое отношение площадей равно $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

**82.** Прежде всего заметим, что если равносторонний треугольник вписан в квадрат так, как о том говорится в условии задачи, то у обеих этих фигур имеется общая ось симметрии (рис. 98).

Пусть площадь данного квадрата равна 1, а сторона равностороннего треугольника равна $x$. Тогда площадь равностороннего треугольника равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. $\angle BAE = 15°$, $x\cos 15° = 1$ и $x^2\cos^2 15° = 1$.

Но $x^2\cos^2 15° = x^2\frac{1+\cos 30°}{2} = x^2\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$, $x^2 = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$.

Таким образом, отношение площади треугольника к площади квадрата составляет: $\frac{4}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{4-3} = 2\sqrt{3}-3$.

**83.** На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $a$ и $b$ строим новый прямоугольный треугольник, гипотенуза которого совпадет с гипотенузой старого, а один катет имеет длину $c$. Квадрат, построенный на другом катете, является искомым. На рисунке 99 он заштрихован.

**84.** Пусть стороны данного треугольника имеют длины $a$, $b$ и $c$; длины перпендикуляров, опущенных на эти стороны, соответственно $h_a$, $h_b$, $h_c$ (рис. 100). Тогда $ah_a + bh_b + ch_c = 2S$, где $S$ — площадь данного треугольника.

Сумма $ah_a + bh_b + ch_c$ остается постоянной. Поэтому произведение $ah_a\cdot bh_b\cdot ch_c$ достигает наибольшего значения, когда $ah_a = bh_b = ch_c$. Вместе с $ah_a\cdot bh_b\cdot ch_c$ достигает наибольшего значения и произведение $h_ah_bh_c$, так как $abc$ постоянно. Эти значения $h_a$, $h_b$, $h_c$ соответствуют, следовательно, такому положению точки $O$, при котором $S(AOB) = S(AOC) = S(BOC)$. Эта точка $O$ есть точка пересечения медиан треугольника.

**85.** Ясно, что $OA > OC$. Площади треугольников $AOC$ и $COD$ (рис. 101) равны, так как у них равные основания $AC$ и $CD$ и равные высоты. Но $S(COD) = \frac{1}{2}CO^2\sin COD$, $S(AOC) = \frac{1}{2}OA\cdot OC\times$ $\times\sin AOC$. Поскольку $AO > OC$, то $\sin AOC < \sin COD$. Значит, и угол $AOC$ меньше острого угла $COD$. Следовательно, и дуга $AE$ меньше дуги $EF$.

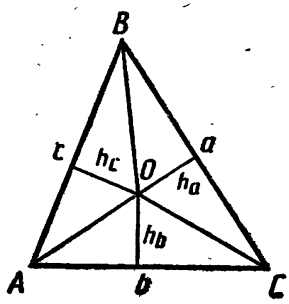



Рис. 100

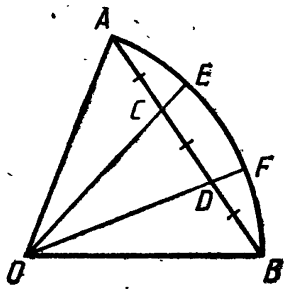



Рис. 101

**86.** Площади треугольников $ABC$ и $BDC$ равны, поскольку они имеют общее основание и равные высоты $h_A$ и $h_D$.

Треугольник $ADE$ подобен треугольнику $ABC$, а треугольник $FDG$ подобен треугольнику $BDC$. Соответствующие стороны подобных треугольников относятся как их соответствующие высоты. Кроме того, высота $h_1$ треугольника $ADE$, проведенная из вершины $A$, равна высоте $h_1'$ треугольника $FDG$, проведенной из вершины $D$. Получаем, что $\frac{DE}{BC} = \frac{h_1}{h_A}$ и $\frac{FG}{BC} = \frac{h_1'}{h_D}$, но $\frac{h_1}{h_A} = \frac{h_1'}{h_D}$, следовательно, $\frac{DE}{BC} = \frac{FG}{BC}$ и $DE = FG$, что и требовалось доказать.

**87.** Пусть высота исходной трапеции равна $h$, а высота трапеции $DMNC$ равна $h_1$ (рис. 102). Площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{a+b}{2} \cdot h$. Эту же площадь можно представить как сумму площадей трапеций $DMNC$ и $MABN$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{a+b}{2}h = \frac{a+c}{2}h_1 + \frac{c+b}{2}(h - h_1).$$

Упростив его, получим: $(a - c)h = (a - b)h_1$ и $\frac{h_1}{h} = \frac{a-c}{a-b}$.

Продолжим прямую $DC$ до пересечения в точке $B'$ с прямой $BB'$, параллельной $AC$. Треугольники $DBB'$ и $DOC$ подобны. Значит, $\frac{h_1}{h} = \frac{a}{a+b}$. Из этого и из предыдущего равенств получаем: $(a - c)(a + b) = (a - b)a$.

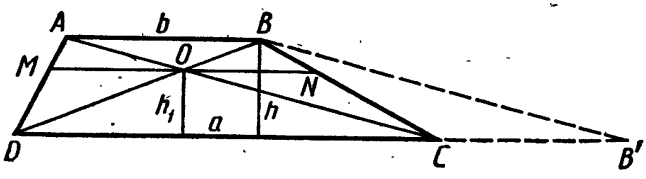



Рис. 102

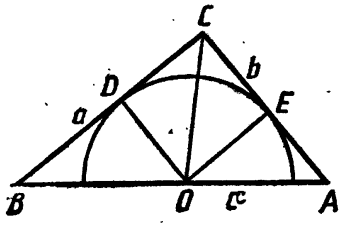



Рис. 103

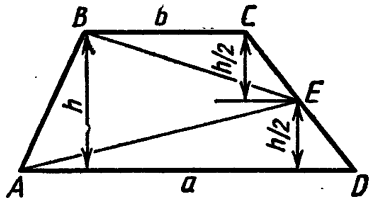



Рис. 104

Следовательно, $c = \frac{(b-a)\,a}{a+b} + a = \frac{ab - a^2 + a^2 + ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$, и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

**88.** Проведем радиусы $OD$ и $OE$ в точки касания (рис. 103). Отрезки $OD$ и $OE$ перпендикулярны соответственно $BC$ и $AC$. Согласно условию задачи $OD$ и $OE$ равны $R$, где $R$ — искомый радиус. Соединим точки $O$ и $C$ отрезком прямой. Площадь треугольника $ABC$ равна $S = S(BOC) + S(AOC)$, $S(BOC) = \frac{aR}{2}$, $S(AOC) = \frac{bR}{2}$. Следовательно, $S = \frac{(a+b)R}{2}$ и $R = \frac{2S}{a+b}$. Величину $S$ находим по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p$ — полупериметр данного треугольника $ABC$.

**89.** Пусть точка $E$ — середина стороны $CD$ (рис. 104). Тогда высота треугольника $BCE$, проведенная к стороне $BC$, равна $\frac{h}{2}$ ($h$ — высота трапеции). Высота треугольника $AED$, проведенная к стороне $AD$, равна также $\frac{h}{2}$.

Поэтому площадь треугольника $S(ABE) = \frac{a+b}{2}h - \frac{ah}{4} - \frac{bh}{4} = \frac{a+b}{4}h = \frac{S(ABCD)}{2}$.

Как следствие из задачи получаем:
удвоенная площадь трапеции равна произведению одной из непараллельных сторон на перпендикуляр, опущенный на нее из середины другой непараллельной стороны.

**90.** Заметим прежде всего, что треугольники $AFD$ и $DEC$ подобны вследствие равенства соответственных углов (рис. 105).

Достроим треугольники $AFD$ и $DEC$ до параллелограммов. Площади параллелограммов с равными высотами относятся как соответствующие этим высотам основания. Следовательно, $\frac{S(FBED)}{2S_2} = \frac{BE}{EC}$ и $\frac{S(FBED)}{2S_1} = \frac{FB}{AF}$.

Перемножим левые и правые части этих равенств и извлечем

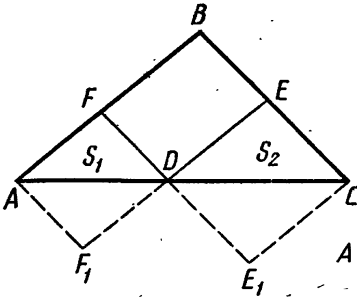



Рис. 105

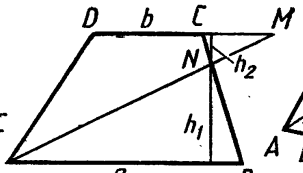



Рис. 106

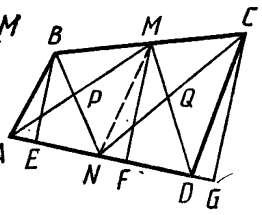



Рис. 107

квадратный корень, получим: $S\,(FBED) = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{FB}{AF}}$, или, воспользовавшись равенствами $BE = FD, FB = DE$, $S\,(FBED) = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot \frac{FD}{AF} \cdot \frac{DE}{EC}}$. Вследствие подобия треугольников $AFD$ и $DEC$ $\frac{FD}{AF} = \frac{EC}{DE}$. Поэтому $S\,(FBED) = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

**91.** Нам нужно добиться, чтобы площадь треугольника $ANB$ (рис. 106) равнялась половине площади данной трапеции.

Пусть высота данной трапеции равна $h$. Тогда площадь ее составляет: $S = \frac{a+b}{2}h$.

Площадь треугольника $ANB$ равна $\frac{a}{2}h_1$, где $h_1$ — расстояние от точки $N$ до большего основания трапеции. По условию задачи должно быть: $\frac{a}{2} \cdot h_1 = \frac{a+b}{4} \cdot h$ и $h_1 = \frac{a+b}{2a} \cdot h$.

Треугольники $ANB$ и $CNM$ подобны (по построению). Поэтому их высоты относятся как соответственные стороны, например как $a$ к $CM$. Пусть расстояние от точки $N$ до прямой, на которой лежит меньшее основание трапеции $b$, равно $h_2$. Тогда $h_1 + h_2 = h$. $\frac{CM}{a} = \frac{h_2}{h_1}$.

Прибавим к обеим частям последней пропорции по 1 и приведем их к общему знаменателю, получим: $\frac{CM+a}{a} = \frac{h}{h_1} = \frac{2a}{a+b}$. Отсюда $CM = \frac{2a^2}{a+b} - a = \frac{2a^2 - a^2 - ba}{a+b} = a\frac{a-b}{a+b}$.

**92.** В треугольнике $b + c > a$, поэтому $a + b + c > 2a$ и $p = \frac{a+b+c}{2} > a$, но $S = \frac{ah_a}{2} = pr$, значит, $h_a > 2r$. Точно так же $h_b > 2r$ и $h_c > 2r$. Складывая соответственно левые и правые части неравенств, получаем: $h_a + h_b + h_c > 6r$.

**93.** а) Покажем, что сумма площадей треугольников $ABN$ и $NCD$ равна площади треугольника $AMD$ (рис. 107). Пусть точки $E$, $F$ и $G$ соответственно проекции точек $B$, $M$ и $C$ на сторону $AD$ данного

четырехугольника или на ее продолжения. Четырехугольник $BCGE$ представляет собой трапецию, а отрезок $MF$ — ее среднюю линию: $MF = \frac{1}{2}(BE + CG)$. Воспользуемся теперь тем, что точка $N$ — середина отрезка $AD$, и получим два равенства $S(ABN) = \frac{1}{2} AD \times \times BE \cdot \frac{1}{2}$, $S(NCD) = \frac{1}{2} AD \cdot CG \cdot \frac{1}{2}$. Складывая соответственно левые и правые части, приходим к равенству $S(ABN) + S(NCD) = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1}{2}(BE + CG) = \frac{1}{2} AD \cdot MF = S(AMD)$. Точно так же $S(ABM) + S(MDC) = S(BNC)$. Поэтому $S(ABCD) = S(AMD) + S(ABM) + S(MDC) = S(ABM) + S(BNC)$.

б) Ответ получается как следствие результата решения задачи а). В самом деле, площадь общей части треугольников $AMD$ и $BNC$ равняется сумме площадей треугольников $ABP$ и $CDQ$.

**94.** Докажем вначале, что площадь четырехугольника $B_1B_2D_1D_2$ равна $\frac{1}{3}$ площади четырехугольника $ABCD$ (рис. 108).

Проведем отрезки $BD_2$, $D_2B_2$, $B_2D$ и $BD$. Треугольник $B_2CD$ имеет площадь, втрое меньшую, чем треугольник $BCD$ (при равных высотах основание первого втрое меньше). Аналогично площадь треугольника $ABD_2$ втрое меньше площади треугольника $ABD$. В результате получается, что $\frac{3}{2} S(D_2BD) + \frac{3}{2} S(BB_2D) = S(ABCD)$. И, замечая, что треугольники $D_2BD$ и $BB_2D$ составляют вместе четырехугольник $D_2BB_2D$, находим площадь последнего: $S(D_2BB_2D) = \frac{2}{3} S(ABCD)$. Четырехугольник $D_2BB_2D$ состоит из попарно равновеликих треугольников $D_2B_2D_1$ и $D_1B_2D$, $BD_2B_1$ и $B_1D_2B_2$. Поэтому $S(D_2B_1B_2D_1) = \frac{1}{2} S(D_2BB_2D) = \frac{1}{3} S(ABCD)$.

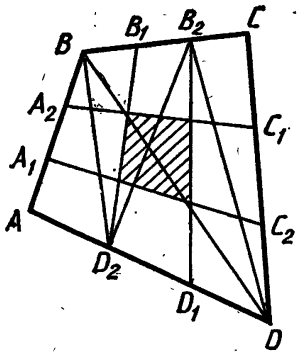


Рис. 108

Рассмотрим теперь отдельно четырехугольник $D_2B_1B_2D_1$ (рис. 109). Четырехугольник, площадь которого надо найти, — $D_3B_4B_3D_4$. Проведем отрезки $B_2B_4$, $D_2D_4$ и $B_2D_2$. Площадь треугольника $B_4B_1B_2$ составляет $\frac{1}{3}$ площади треугольника $D_2B_1B_2$, $S(D_2D_1D_4) = \frac{1}{3} S(D_2B_2D_1)$. Поэтому $S(D_2B_4B_2D_4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} S(ABCD) = \frac{2}{9} S(ABCD)$. Проведем, наконец, отрезок $B_4D_4$ и заметим, что треугольники $B_2B_4B_3$ и $D_4B_4B_3$, $D_2D_4D_3$ и $B_4D_4D_3$ попарно равновелики. Поэтому $S(D_3B_4B_3D_4) = \frac{1}{2} S(B_4B_2D_4D_2) =$

$= \frac{1}{9} S(ABCD)$, что и требовалось доказать.

**95.** Имеем: $S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$, $S(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \sin A$. Требуемое отношение площадей равно $\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

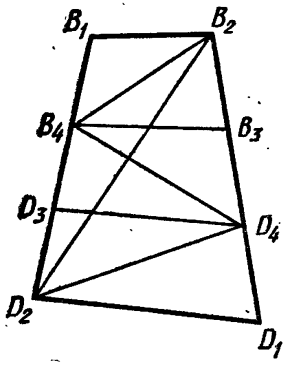


Рис. 109

**96.** Ясно, что радиус данного полукруга может быть представлен как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет равен стороне $a$ искомого квадрата, а другой $\frac{a}{2}$ (рис. 110). Следовательно, $a^2 + \frac{a^2}{4} = R^2$ и $a = \frac{2}{\sqrt{5}} R$. Искомая площадь квадрата равна $\frac{4}{5} R^2$.

**97.** На основании решения задачи 95 получаем:

$$\frac{S(ADB_1)}{S(BDA_1)} = \frac{AD \cdot B_1D}{BD \cdot DA_1}; \quad \frac{S(BDC_1)}{S(B_1CD)} = \frac{BD \cdot C_1D}{B_1D \cdot DC}; \quad \frac{S(A_1DC)}{S(ADC_1)} = \frac{A_1D \cdot DC}{AD \cdot C_1D}.$$

Перемножая соответственно левые и правые части равенств, имеем:

$$\frac{S(ADB_1)}{S(BDA_1)} \cdot \frac{S(BDC_1)}{S(B_1CD)} \cdot \frac{S(A_1DC)}{S(ADC_1)} = 1.$$

Переставим в левой части множители так, чтобы бралось отношение площадей треугольников, у которых по стороне принадлежало бы одной и той же стороне треугольника $ABC$:

$$\frac{S(ADB_1)}{S(B_1CD)} \cdot \frac{S(A_1DC)}{S(BDA_1)} \cdot \frac{S(BDC_1)}{S(ADC_1)} = 1.$$

У треугольников $ADB_1$ и $B_1CD$ высоты равны. Поэтому $\frac{S(ADB_1)}{S(B_1CD)} = \frac{AB_1}{B_1C}$. Точно так же получаем: $\frac{S(A_1DC)}{S(BDA_1)} = \frac{A_1C}{A_1B}$, $\frac{S(BDC_1)}{S(ADC_1)} = \frac{BC_1}{C_1A}$.

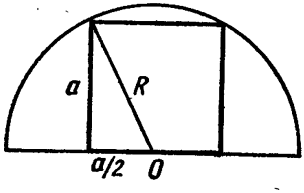


Рис. 110

Подставляя значение отношений площадей в предыдущее равенство, получаем требуемое равенство: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

**98.** Пусть отрезки $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в некоторой точке $D'$ внутри треугольника $ABC$ (рис. 111). Проведем прямую $CD'$ до пересечения со стороной $AB$ в точке $C_1'$. Тогда на основании прямой теоремы Чевы

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1'}{C_1'A} = 1.$$

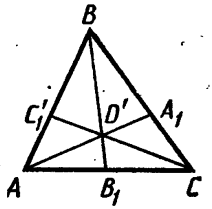


Рис. 111

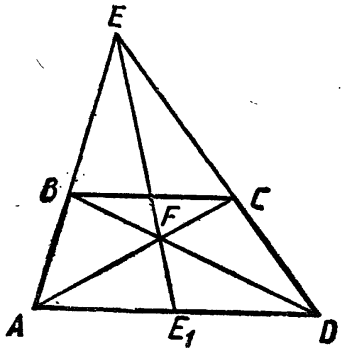



Рис. 112

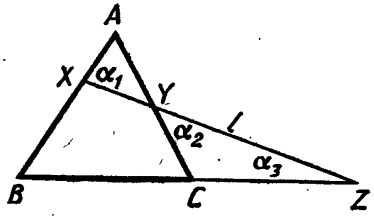



Рис. 113

Значит, справедливо равенство $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_1'}{C_1'A} = 1$, т. е. точки $C_1$ и $C_1'$ совпадают, а потому $CC_1$ тоже проходит через точку $D'$.

**99.** Примем, что $\frac{BE}{BA} = m$. Тогда на основании теоремы Фалеса $\frac{EC}{CD} = m$. Обозначим через $E_1$ точку пересечения $EF$ и $AD$ (рис. 112). Тогда должно быть: $\frac{AE_1}{E_1D} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EB}{BA} = 1$. Но $\frac{BE}{BA} \cdot \frac{CD}{EC} = 1$, поэтому $\frac{AE_1}{E_1D} = 1$ и $AE_1 = E_1D$.

**100.** Пусть секущая $l$ составляет с $AB$ угол $\alpha_1$, с $AC$ — угол $\alpha_2$, с $BC$ — угол $\alpha_3$. Точки пересечения $l$ с $AB$, $AC$ и $BC$ (или их продолжениями) обозначим соответственно $X, Y$ и $Z$ (рис. 113). Тогда на основании теоремы синусов из треугольника $AXY$ имеем: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{AY}{AX}$, из треугольника $BXZ$: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3} = \frac{BZ}{BX}$ и из треугольника $CYZ$: $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{CZ}{YC}$. Перемножая эти равенства, получаем:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_1} = \frac{AY}{AX} \cdot \frac{CZ}{YC} \cdot \frac{BX}{BZ} = 1,$$

что и требовалось.

**101.** а) Если $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — медианы, то (рис. 114)

$$\frac{AB_1}{B_1C} = 1, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = 1, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \text{ и } \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

откуда на основании обратной теоремы Чевы убеждаемся, что медианы обязаны пересекаться в одной точке.

б) Если $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — биссектрисы, то $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}$, $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c}$, $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{a}{b}$ и $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, откуда на основании обратной теоремы Чевы получаем, что и биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

в) Пусть $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ — высоты остроугольного треугольника ($CC_1$ на рисунке 115 не нанесена). Имеем: $AB_1 = AB\cos A = c\cos A$, $B_1C = a\cos C$, $CA_1 = b\cos C$, $A_1B = c\cos B$, $BC_1 = a\cos B$,

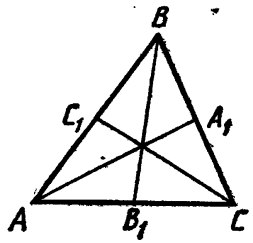



Рис. 114

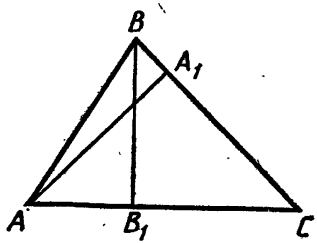



Рис. 115

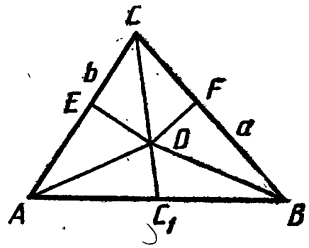



Рис. 116

$C_1A = b\cos A$. Поэтому $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{c\cos A}{a\cos C}\cdot\frac{b\cos C}{c\cos B}\cdot\frac{a\cos B}{b\cos A} =$ $= 1$. Вновь на основании обратной теоремы Чевы получаем, что высоты действительно пересекаются в одной точке.

**102.** Известно, что центр масс треугольника находится в точке $D$ пересечения его медиан. Пусть перпендикуляры, о которых идет речь в условии задачи, — $DE$ и $DF$ (рис. 116). Проведем дополнительно отрезки прямых $AD$ и $BD$. Площади треугольников $ACC_1$ и $BCC_1$, $ADC_1$ и $BDC_1$, $ADC$ и $BDC$ попарно равны. Следовательно, длины отрезков $ED = x$ и $DF = y$ должны быть связаны соотношением $bx = ay$, но $y = l - x$, поэтому $bx = a(l - x)$ и $x = \frac{la}{a+b}$, $y = \frac{lb}{a+b}$.

**103.** Пусть биссектрисы треугольника $ABC$ — $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, а стороны треугольника — $a$, $b$, $c$ (рис. 117).

$$A_1C = \frac{ab}{b+c},\quad \frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1C}{AC} = \frac{\frac{ab}{b+c}}{b} = \frac{a}{b+c}.$$

Точно так же получаем: $\frac{OB_1}{OB} = \frac{b}{a+b}$ и $\frac{OC_1}{OC} = \frac{c}{a+b}$.

**104.** На продолжении отрезка $BG$ отложим отрезок $GB_1 = \frac{1}{2}BG$ (рис. 118), соединим точки $B_1$ и $O$ отрезком и через точку $B_1$ проведем прямую, перпендикулярную отрезку $OB_1$. Из точки $O$ как из центра радиусом, равным $OB$, проводим окружность. Она пересечет указан-

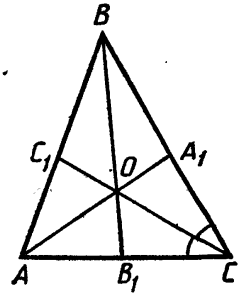



Рис. 117

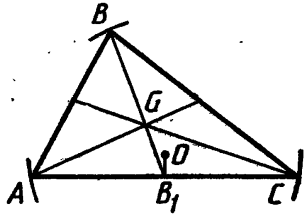



Рис. 118

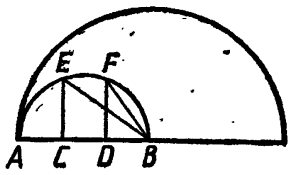



Рис. 119

ную прямую в точках $A$ и $C$. Соединив точки $A$, $B$ и $C$ отрезками прямых, получим искомый треугольник.

**105.** Проведем хорду $CD$. Ясно, что если нам удастся показать равновеликость трапеции $FECD$ и треугольника $OCD$, то из этого сразу будет вытекать равенство площадей сектора $OCD$ и криволинейной трапеции $FECD$, поскольку сегмент $CD$ входит в состав каждой из названных фигур.

Пусть отрезки $FD$ и $OC$ пересекаются в точке $G$. Треугольник $CGD$ принадлежит одновременно треугольнику $OCD$ и трапеции $FECD$. Значит, чтобы получить нужный результат, достаточно доказать равновеликость треугольника $OGD$ и трапеции $FECG$.

Замечаем, что прямоугольные треугольники $OEC$ и $OFD$ равны по гипотенузе и одному из острых углов, значит, равны их площади. Треугольник $OFG$ содержится в каждом из них, поэтому площади трапеции $FECG$ и треугольника $OGD$ равны, и следовательно, $S(FECD) = S(OCD)$.

**106.** Построим на радиусе $AB$ данного круга полукруг, разделим отрезок $AB$ на три равных отрезка точками $C$ и $D$ (рис. 119), через точки $C$ и $D$ проведем перпендикуляры к $AB$ до пересечения с построенной полуокружностью соответственно в точках $E$ и $F$. Отрезки $FB$ и $EB$ — радиусы искомых окружностей, разделяющих данный круг на попарно равновеликие концентрические кольца. Докажем это.

Площадь данного круга равна $\pi R^2$, где $R=AB$. Отрезок $DB=\frac{R}{3}$, отрезок $AD=\frac{2}{3}R$, $FD=\sqrt{\frac{R}{3}\cdot\frac{2}{3}R}=\frac{\sqrt{2}R}{3}$. По теореме Пифагора $BF=\sqrt{\frac{R^2}{9}+\frac{2}{9}R^2}=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

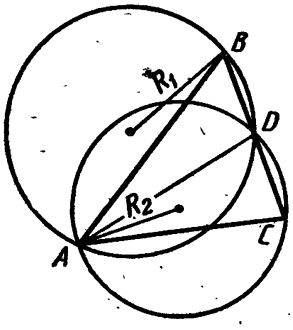



Рис. 120

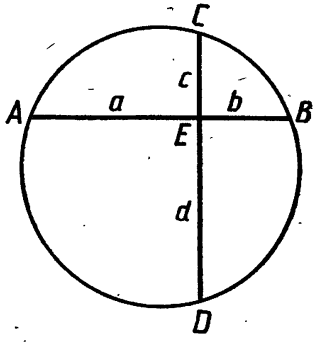



Рис. 121

Площадь круга, концентрического данному, с радиусом $BF$ равна $\frac{\pi R^2}{3}$, как и требовалось. Имеем:

$$BE = \sqrt{\frac{4}{9}R^2 + \frac{2}{9}R^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

Площадь круга, концентрического данному, с радиусом $BE$ равна $\frac{2\pi}{3}R^2$, как и требовалось.

Площадь каждого из колец равна $\frac{\pi R^2}{3}$.

**107.** Отношение этих площадей не зависит от положения точки $D$ на стороне $BC$ треугольника $ABC$. На основании теоремы синусов имеем: $2R_1 = \frac{AD}{\sin B}$ и $2R_2 = \frac{AD}{\sin C}$ (рис. 120).

Но площади кругов относятся как квадраты радиусов, поэтому

$$\frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{\frac{AD^2}{\sin^2 B}}{\frac{AD^2}{\sin^2 C}} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{b^2}$$ (на основании теоремы синусов).

**108.** Имеем: $ab = cd$ (рис. 121). В треугольнике $ACB$ сторона $AC$ равна $\sqrt{a^2 + c^2}$, сторона $CB$ равна $\sqrt{c^2 + b^2}$, сторона $AB$ равна $a + b$, $\sin CAB = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, $\frac{BC}{\sin CAB} = \frac{\sqrt{c^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}}{c} = 2R$.

Площадь круга $S = \pi R^2$,

$$S = \frac{(c^2 + b^2)(a^2 + c^2)}{4c^2}\pi = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + c^2 + a^2 + b^2\right).$$

Но $\frac{ab}{c} = d$, поэтому получаем, что

$$S = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

## 9 класс

**1.** Каждая точка пространства окрашена в один из пяти цветов, при этом каждый из пяти цветов использован хотя бы один раз. Доказать, что в пространстве найдется плоскость, точки которой окрашены не менее чем в четыре цвета.

**2.** Пусть $OA$, $OB$, $OC$ и $OD$ — четыре разные прямые линии, никакие три из которых не находятся в одной плоскости. Точка $A'$ принадлежит прямой $OA$, точка $B'$ — прямой $OB$, точка $C'$ — прямой $OC$ и точка $D'$ — прямой $OD$. Если окажется, что прямая $AB$ пересекается с прямой $CD$ в точке $E$, а прямая $A'B'$ пересекается с прямой $C'D'$ в точке $E'$, то три точки $O$, $E$ и $E'$ принадлежат одной прямой. Доказать.

**3.** Даны точки $P$, $Q$ и $R$ соответственно на сторонах $AB$, $BC$ и $CD$ пространственного четырехугольника $ABCD$ общего вида. Найти точку $S$ пересечения прямой $AD$ с плоскостью $PQR$.

**4.** Пусть $SABC$ — театраэдр. Ребра его, соединяющие вершину $S$ с вершинами $A$, $B$, $C$, обозначим соответственно $a_1$, $b_1$, $c_1$. В грани $ABC$ обозначим сторону, противоположную вершине $A$, буквой $a$, противоположную вершине $B$ — буквой $b$, противоположную вершине $C$ — буквой $c$. Доказать, что $a_1 + b_1 + c_1 > \frac{1}{2}(a + b + c)$.

**5.** Пусть точки $A$ и $B$ расположены на одной из скрещивающихся прямых, а точки $C$ и $D$ — на другой. Доказать, что прямые $AD$ и $BC$ тоже скрещивающиеся.

**6.** Доказать, что если у пространственного четырехугольника общего вида противоположные стороны попарно равны, то равны попарно и его противоположные углы.

**7.** Имеется пространственный четырехугольник $ABCD$ общего вида. Через середину $P$ его стороны $AB$ и середину $Q$ его стороны $CD$ проведена плоскость, которая пересекает его сторону $AD$ в точке $R$ и сторону $BC$ в точке $S$ (рис. 122). Доказать, что $\frac{AR}{RD} = \frac{BS}{SC}$.

**8.** Доказать, что если прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$, то кратчайшее расстояние от этой прямой до всех непараллельных ей прямых плоскости $\alpha$ одно и то же.

**9.** Существуют ли в пространстве четыре попарно перпендикулярные скрещивающиеся прямые?

**10.** Между двумя скрещивающимися прямыми $a$ и $b$ поместить отрезок данной длины $d$ так, чтобы он с обеими этими прямыми составлял равные углы.

**11.** В пространственном четырехугольнике $ABCD$ общего вида (т. е. такого, у которого противоположные стороны лежат попарно на скрещивающихся прямых) каждая из сторон делится на три равных отрезка. Противоположные точки деления соединяются отрезками прямых (рис. 123). Доказать, что каждый из этих отрезков пересекается с двумя другими в двух из четырех точек $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ (именно пересекается, а не лежит на одной из скрещивающихся прямых).

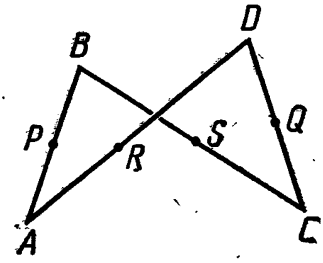



Рис. 122

**12.** $ABCD$ — параллелограмм, $E$ — точка пересечения его диагоналей. Пусть $O$ — некоторая точка пространства трех измерений. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 4 \cdot \overline{OE}$.

**13.** В пространстве произвольным образом расположены два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки $A$ и $A_1$, $B$ и $B_1$, $C$ и $C_1$, $D$ и $D_1$ соединены попарно отрезками прямых. Доказать, что середины отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ являются вершинами еще одного параллелограмма.

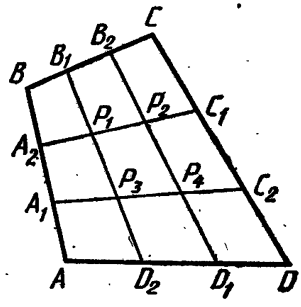



Рис. 123

**14.** Через середину $Q$ ребра $AB$ произвольного тетраэдра $PABC$ проведена прямая $a$, параллельная $PC$, через середину $R$ ребра $BC$ — прямая $b$, параллельная $PA$, через середину $S$ ребра $CA$ — прямая $c$, параллельная $PB$. Доказать, что прямые $a$, $b$ и $c$ пересекаются в одной точке.

**15.** Плоскость $\alpha$, в которой расположен многоугольник, образует с плоскостью $\beta$ острый угол $\varphi$. Доказать, что площадь проекции данного многоугольника на плоскость $\beta$ равна $S \cos \varphi$, где $S$ — площадь данного многоугольника.

**16.** Показать, что в сечении куба плоскостью нельзя получить правильный пятиугольник.

## 10 класс

**17.** Выпуклый четырехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

**18.** В тетраэдре $DABC$ найдется хотя бы одна такая вершина, что из трех ребер, сходящихся в ней, можно построить треугольник.

**19.** Дан тетраэдр $DABC$ такой, что $DA = BC$, $DB = AC$, $DC = AB$. Через вершину тетраэдра $A$ проведем прямую, параллельную его ребру $BC$, через вершину $B$ — прямую, параллельную ребру $AC$, через вершину $C$ — прямую, параллельную $AB$. Эти прямые лежат в одной плоскости — плоскости треугольника $ABC$ — и образуют тре-

угольник $A'B'C'$, вершина $A'$ которого находится против $A$, $B'$ — против $B$, $C'$ — против $C$. Проведем теперь отрезки прямых $DA'$, $DB'$, $DC'$. Доказать, что боковые грани нового тетраэдра $DA'B'C'$ — прямоугольные треугольники.

**20.** Сколько разных тетраэдров можно получить из данной развертки одного тетраэдра?

**21.** Дан тетраэдр, у которого периметры всех граней равны. Доказать, что грани тетраэдра равны между собой.

**22.** Доказать, что у произвольного тетраэдра есть хотя бы одна вершина, все плоские углы которой острые.

**23.** В трехгранном угле все плоские углы прямые. Провести плоскость так, чтобы в сечении трехгранного угла этой плоскости получился данный треугольник.

**24.** Доказать, что сумма углов пространственного четырехугольника меньше 360°.

**25.** Внутри тетраэдра или на одной из его граней $ADB$, $BDC$ или $ADC$ берется точка $M$, не совпадающая с вершиной $D$. Доказать, что среди отрезков прямых $MA$, $MB$ и $MC$ найдется такой, длина которого меньше длины одного из следующих ребер тетраэдра: $AD$, $BD$ или $CD$.

**26.** Доказать, что в тетраэдре, каждая пара скрещивающихся ребер которого образует прямой угол, высоты проходят через точки пересечения высот граней.

**27.** Доказать, что всякий остроугольный треугольник с проведенными в нем средними линиями можно рассматривать как развертку тетраэдра, у которого ребрами служат средние линии и отрезки сторон треугольника, по которым произведен разрез его ребер. Назовем тетраэдр, который можно так получить, тетраэдром вида $T$. Почему существенно требование, чтобы треугольник был остроугольным?

**28.** Доказать, что у тетраэдров вида $T$ все грани — равные треугольники.

**29.** Доказать, что если грани тетраэдра — равновеликие остроугольные треугольники, то тетраэдр этот принадлежит к виду $T$.

**30.** Рассмотрим уравнение произвольной плоскости, не проходящей через начало координат: $Ax + By + Cz = D$. Раз плоскость не проходит через начало координат, то обязательно $D \neq 0$. Поэтому уравнение той же плоскости можно записать так: $\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z = 1$, или так: $\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1$, или так: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$, где $p = \frac{D}{A}$, $q = \frac{D}{B}$, $r = \frac{D}{C}$. Последнее уравнение плоскости называют *уравнением плоскости в отрезках координатных осей* или, сокращенно, *уравнением плоскости в отрезках*. У чисел $p$, $q$ и $r$ есть геометрический смысл — они выражают длины отрезков координатных осей от начала координат до точки пересечения координатной оси с рассматриваемой плоскостью. Если, например, число $p$ имеет положительное значение, то рассматриваемая плоскость пересекается с осью абсцисс на рас-

стоянии $p$, отсчитанном от начала координат в положительном направлении, если, напротив, $p < 0$, то плоскость пересекается с осью абсцисс на расстоянии $p$, отсчитанном от начала координат в отрицательном направлении.

Если две из трех координат точки пересечения оси $x$ с плоскостью $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ равны 0, третью координату найти легко: $\frac{x}{p} = 1$ и $x = p$. Искомая точка $(p;\ 0;\ 0)$. Аналогично вычисляем координаты точки пересечения данной плоскости с другими координатными осями: $(0;\ q;\ 0)$ и $(0;\ 0;\ r)$.

Используя сказанное, решить следующую задачу.

Найти всевозможные положительные значения $a$, $b$ и $c$ такие, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{6} + \frac{c}{7} \leqslant 1.$$

**31.** Прямой двугранный угол с ребром $AB$ пересечен плоскостью, перпендикулярной ребру. Пусть $C$ — точка пересечения ребра $AB$ с этой плоскостью, а $D$ и $E$ — точки на прямых, по которым пересекаются грани двугранного угла и плоскость. В гранях двугранного угла проведены лучи $CF$ и $CG$. Показать, что если эти лучи находятся по одну сторону от плоскости $DCE$, то плоский угол $FCG$ острый, если по разные — то тупой.

**32.** Равносторонний треугольник вписан в окружность. Показать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин треугольника не зависит от выбора этой точки, т. е. величина постоянная (предлагается найти решение с выходом в третье измерение).

**33.** Какое множество точек пространства описывается уравнением $|x| + |y| + |z| = 1$?

**34.** Доказать, что если в данном тетраэдре две пары противоположных ребер перпендикулярны, то и третья пара противоположных ребер перпендикулярна.

**35.** Доказать, что не существует выпуклого многогранника, у которого всякая грань имеет четыре ребра и в каждой вершине сходится по четыре ребра.

**36.** Доказать, что плоскости, перпендикулярные ребрам тетраэдра и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

**37.** Доказать, что если два противоположных ребра тетраэдра равны, то у описанного около него параллелепипеда грани, в которых лежат указанные ребра, являются прямоугольниками.

**38.** Доказать, что диагонали четырехугольной призмы представляют собой две пары пересекающихся прямых и что расстояние между точками их пересечения равно расстоянию между серединами диагоналей любого из оснований.

**39.** В параллелепипеде $ABCDEFGH$ через вершины $B$, $D$ и $E$ проведена плоскость. В каком отношении делит эта плоскость диагональ $AG$?

**40.** В кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведено сечение $A'BD$. Доказать, что диагональ куба $AC'$ перпендикулярна сечению $A'BD$.

**41.** Как из квадрата получить развертку тетраэдра, сделав только один прямолинейный разрез?

**42.** Вершина $n$-угольной пирамиды, не принадлежащая основанию, проектируется в его внутреннюю точку. Площади боковых граней пирамиды — $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$. Двугранные углы между боковыми гранями и основанием соответственно равны $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$. Доказать, что площадь основания пирамиды равна $S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + \ldots + S_n \cos \alpha_n$.

**43.** Разделить плоскими разрезами куб на 27 равных кубов. Показать, что такое разделение, как бы ни перекладывали отделенные части друг относительно друга перед очередным разрезом, нельзя осуществить меньше чем за шесть разрезов.

**44.** Разделить плоскими разрезами куб на 64 равных куба. Показать, что для такого разделения, если использовать перекладывание отделенных частей, достаточно шесть плоских разрезов.

**45.** а) Куб делим плоскостями, параллельными его граням, на $n^3$ маленьких равных кубиков. Во сколько раз общая поверхность маленьких кубиков окажется больше поверхности данного куба?

б) Существует механическая гипотеза, согласно которой работа, производимая при дроблении скальных пород, пропорциональна площади поверхности, раскрывающейся при этом дроблении. Пусть расщепление каменного куба по одной плоскости составляет $A$ единиц работы. Сколько единиц работы придется затратить при расщеплении данного куба на $n^3$ маленьких кубиков?

**46.** В тетраэдре все три плоских угла одного из трехгранных углов прямые. Ребра противоположной грани равны $a$, $b$ и $c$. Найти остальные ребра тетраэдра.

**47.** На гранях трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, заданы три точки $A$, $B$ и $C$. Вычислить стороны треугольника, вершины которого лежали бы на ребрах данного угла, а стороны проходили через точки $A$, $B$ и $C$.

**48.** Показать, что все сечения правильного тетраэдра плоскостями, параллельными одному из его ребер, имеют одинаковый периметр, равный $2a$, где $a$ — длина ребра тетраэдра.

**49.** У двух разных тетраэдров $DABC$ и $DA'B'C'$ ребра $DA$ и $D'A'$ расположены на прямой $a$, а ребра $BC$ и $B'C'$ — на скрещивающейся с прямой $a$ прямой $b$. При этом $DA = D'A'$ и $BC = B'C'$. Доказать, что объем тетраэдра $DABC$ равен объему тетраэдра $DA'B'C'$.

**50.** Доказать, что сумма расстояний от любой внутренней точки правильного тетраэдра до его граней есть величина постоянная. Для какого тетраэдра, не являющегося правильным, справедливо это же свойство?

**51.** Любая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер произвольного тетраэдра, делит его на два равновеликих тетраэдра.

**52.** Пусть $DABC$ — тетраэдр, точки $A'$, $B'$, $C'$ выбраны произвольно, соответственно на его сторонах $DA$, $DB$, $DC$. Доказать, что объемы тетраэдров $DA'B'C'$ и $DABC$ относятся как произведение $DA' \cdot DB' \cdot DC'$ к произведению $DA \cdot DB \cdot DC$.

53. Плоскость, проходящая через одно из ребер тетраэдра и середину противоположного ребра, делит его на тетраэдры, имеющие равные объемы.

54. Основания прямой призмы — трапеции $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Соответственными основаниями трапеций служат $AB$ и $A'B'$, $CD$ и $C'D'$. Расстояние между плоскостями $ABA'$ и $CDC'$ равно $h$. Доказать, что объем призмы равен половине произведения $h$ на сумму площадей прямоугольников $ABB'A'$ и $CDD'C'$.

55. В тетраэдре $SABC$ противоположные ребра попарно равны, т. е. $SA = BC = a$, $SB = AC = b$, $SC = AB = c$. Выразить объем тетраэдра через $a$, $b$ и $c$.

56. Как связаны между собой количества ребер и граней пирамиды, у которой в основании $n$-угольник? Может ли пирамида иметь 12 ребер и 6 граней?

57. Середины граней куба, имеющих по общему ребру, соединены отрезками прямых. Показать, что в результате получен октаэдр.

58. Полуправильными многогранниками называют такие многогранники, у которых грани представляют собой правильные, но не обязательно равные многоугольники. Выполняя сечение куба плоскостями, перпендикулярными его диагоналям, можно получить несколько полуправильных многогранников. Что это за многогранники?

59. Подсчитать объем стружки, которую следует удалить токарю, чтобы получить канавку глубиной $x$ и шириной $y$ на цилиндрической детали диаметром $d$ (рис. 124).

60. Пучок укропа, перевязанный ниткой, продают на рынке за 20 к. Сколько должен стоить пучок такого же укропа, если длина нитки, перевязывающей его, вдвое длиннее? (Имеется в виду, что нить охватывает пучки укропа в обоих случаях в один ряд перпендикулярно направлению стеблей укропа; часть нити, которая пошла на узел, не учитывается.)

61. Цистерна цилиндрической формы расположена так, что ось цилиндра заняла горизонтальное положение. Вместимость цистерны составляет $V$ единиц объема, длина цистерны равна $l$. Чтобы узнать, сколько осталось в цистерне жидкости, в нее опускают вертикально линейку, при этом часть линейки длиной $h$ оказывается смоченной. Найти объем жидкости в цистерне.

62. Под силу ли ребенку поднять шар, отлитый из стали, если его объем вмещает столько же кубических сантиметров, сколько квадратных сантиметров содержит площадь его поверхности?

63. У вишни одинаковы толщина мякоти и диаметр косточки. Сколько получится стаканов мякоти, если вишневых косточек собрали два стакана?

64. Калибр, с помощью которого узнают диаметр шаров, представляет собой

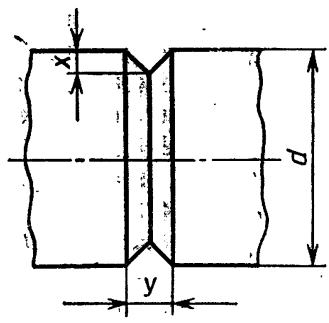


Рис. 124

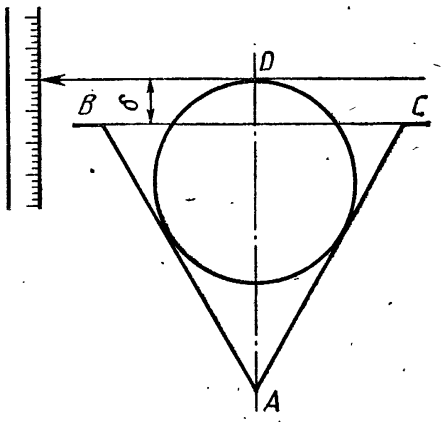



Рис. 125

коническую выемку с углом 30° между образующей и осью конуса. Этот калибр позволяет определять расстояние от верхней точки шара до плоскости $BC$ (рис. 125). Как по величине «погружения» или «выступа» $\delta$ вычислить диаметр шара?

**65.** Найти геометрическое место точек центров окружностей, получившихся при сечении шара плоскостями, проходящими через данную точку (не совпадающую с центром шара).

**66.** Доказать, что в тетраэдр можно вписать сферу.

**67.** Сфера касается ребер тетраэдра $ABCD$. Показать, что в этом случае справедливы равенства $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

**68.** Найти геометрическое место точек в пространстве, из которых два отрезка прямых $AB$ и $AG$ видны оба под прямым углом.

**69.** Доказать, что точечный источник света можно загородить четырьмя не пересекающимися абсолютно черными шарами.

## РЕШЕНИЯ

### 9 класс

**1.** Существование «двуцветных» прямых, т. е. прямых, точки которых окрашены не менее чем в два цвета, очевидно. Такие прямые проходят через любые две точки разного цвета. Если хотя бы одна из таких двуцветных прямых является одновременно и трехцветной, т. е. окрашенной не менее чем в три цвета, то найдется плоскость, точки которой окрашены не менее чем в четыре цвета. В качестве четвертой точки, принадлежащей четырехцветной плоскости, можно взять любую точку, окрашенную в еще не использованный четвертый цвет. (В частности, эта точка может принадлежать рассматриваемой трехцветной прямой.) Итак, для того чтобы требуемое доказательство было проведено, достаточно показать, что в рассматриваемом пространстве найдется хотя бы одна трехцветная прямая.

Пусть теперь $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$ — пять точек рассматриваемого пространства, окрашенные в пять различных цветов, причем никакие три из этих точек не принадлежат одной прямой (худший вариант). Выберем из этих пяти точек три, скажем $A$, $B$ и $C$. Как и любая другая тройка из рассматриваемой пятерки, они определяют трехцветную плоскость. Поэтому в тетраэдрах $ABCD$ и $ABCE$ каждая из граней определяет трехцветную плоскость.

Возможны следующие два случая: 1) точка $E$ находится на грани тетраэдра $ABCD$ или точка $D$ находится на грани тетраэдра $ABCE$;

2) точка $E$ находится вне граней тетраэдра $ABCD$ или точка $D$ находится вне тетраэдра $ABCE$.

В случае 1) в одной из граней тетраэдра $ABCD$ или тетраэдра $ABCE$ оказываются точки, окрашенные в четыре (не меньше) различных цвета. Следовательно, нашлась четырехцветная плоскость. В случае 2) две точки разных цветов разделены плоскостью грани тетраэдра, окрашенной в три других цвета. Если цветов в грани оказывается больше, то эта промежуточная плоскость сама оказывается окрашенной в четыре цвета, что и требовалось. Поэтому прямая, проходящая через две точки разных цветов, пересекает промежуточную плоскость в точке, цвет которой не совпадает с их цветами. Прямая, определенная двумя точками, находящимися по разные стороны от промежуточной плоскости, оказывается трехцветной.

Итак, во всех возможных случаях нашлась трехцветная прямая, и следовательно, четырехцветная плоскость.

2. Точки $O$, $E$ и $E'$ лежат на пересечении плоскостей $OAB$ и $OCD$ и поэтому находятся на одной прямой.

3. Соединим попарно прямыми точки $A$ и $Q$, $P$ и $C$. Обе прямые лежат в одной плоскости $ABC$ и пересекаются в некоторой точке $X$. Прямые $PR$ и $XD$ находятся в одной плоскости $PCD$ и пересекаются в точке $Y$. Эта точка находится на прямой $XD$ и принадлежит плоскости $AXD$ (как и точка $Q$). Поэтому прямая $QY$ пересекает прямую $AD$ в некоторой точке, которая находится в плоскости $PQR$. Следовательно, эта точка — искомая точка $S$.

4. Имеем: $a_1 + b_1 > c$, $a_1 + c_1 > b$, $b_1 + c_1 > a$. Складывая соответственно левые и правые части неравенств, получаем, что и требовалось: $a_1 + b_1 + c_1 > \frac{1}{2}(a + b + c)$.

5. Допустим, что прямые $AD$ и $BC$ нескрещивающиеся, тогда они или параллельные, или пересекающиеся. Следовательно, точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат в одной плоскости. Но это противоречит утверждению в условии задачи, что прямые $AB$ и $CD$ скрещивающиеся. Следовательно, прямые $AD$ и $BC$ скрещивающиеся.

6. Рассмотрим, например, четырехугольник $ABDC$. Его противоположные стороны — $AB$ и $DC$, $AC$ и $BD$; противоположные плоские углы — $BAC$ и $BDC$, $ACD$ и $ABD$. Проведем диагонали данного четырехугольника $AD$ и $BC$ и рассмотрим тетраэдр $ABCD$ (рис. 126).

По условию задачи $AB = CD$ и $AC = BD$. Замечаем, что у треугольников $ABC$ и $BCD$ по две равные стороны по условию и одна сторона $BC$ у них общая. Следовательно, эти треугольники равны по трем сторонам, и равны их соответствующие углы $BAC$ и $BDC$. Рассматривая равные треугольники $BAD$ и $ADC$, показываем равенство углов $ABD$ и $ACD$.

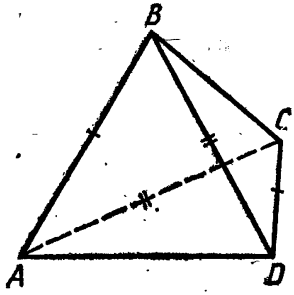


Рис. 126

7. Точки $A$ и $B$ расположены по разные стороны и на равных расстояниях от секущей плоскости $PRQS$. То же можно сказать и о точках $C$ и $D$. Проведем через точки $A$, $B$, $C$ и $D$ соответственно плоскости $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, все параллельные секущей плоскости $PRQS$. Пусть расстояния от этих плоскостей до секущей плоскости соответственно равны $h_\alpha$, $h_\beta$, $h_\gamma$ и $h_\delta$. При этом, естественно, выполняются равенства $h_\alpha = h_\beta$, $h_\gamma = h_\delta$.

Если на плоскости $\alpha$ выбрать произвольную точку $A'$ и провести через нее прямую, пересекающую плоскость $\delta$ в точке $D'$, то эта прямая пересечет плоскость $PRQS$ в некоторой точке $R'$. При этом $\frac{A'R'}{R'D'} = \frac{h_\alpha}{h_\delta}$. Это равенство оказывается верным, в частности, для $A = A'$, $D = D'$ и $R = R'$ и записывается так: $\frac{AR}{RD} = \frac{h_\alpha}{h_\delta}$. Аналогично убеждаемся, что $\frac{BS}{SC} = \frac{h_\beta}{h_\gamma}$. Из равенств $h_\alpha = h_\beta$ и $h_\gamma = h_\delta$ получаем требуемое равенство: $\frac{AR}{RD} = \frac{BS}{SC}$.

8. Рассмотрим произвольную прямую $b$, не параллельную прямой $a$ и расположенную в плоскости $\alpha$. Проведем через данную прямую $a$ плоскость $\beta$, перпендикулярную плоскости $\alpha$. Прямая $c$, по которой плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекутся, не параллельна прямой $b$, но находится в одной с ней плоскости. Поэтому прямые $b$ и $c$ пересекутся в некоторой точке $P$. Восстановим в этой точке $P$ перпендикуляр к плоскости $\alpha$ до пересечения с данной прямой $a$ в точке $Q$. В результате расстояние между данной прямой $a$ и выбранной в плоскости $\alpha$ не параллельной ей прямой $b$ оказывается равным расстоянию от прямой $a$ до плоскости $\alpha$.

9. Предположим, что существуют. Выберем из этих четырех взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых произвольно две. Все плоскости, параллельные этим двум прямым, параллельны между собой. Возьмем из этих плоскостей одну. Оставшиеся две скрещивающиеся прямые должны быть перпендикулярны этой плоскости, следовательно, они должны быть параллельны между собой. Но две прямые не могут быть одновременно параллельны друг другу и перпендикулярны. Мы пришли к противоречию. Поэтому наше предположение, что в пространстве может существовать четверка попарно перпендикулярных скрещивающихся прямых, ложно.

10. Через две скрещивающиеся прямые $a$ и $b$ единственным образом можно провести по плоскости так, чтобы эти плоскости были параллельны. Проведем эти плоскости.

На данных прямых можно выбрать по точке так, чтобы расстояние между этими точками было минимально. Проведем еще через одну из данных прямых, например $a$, плоскость $\alpha$ перпендикулярно плоскости, в которой находится прямая $b$. Тогда точка пересечения $\alpha$ и $b$ определяет искомую точку, принадлежащую $b$. Искомую точку на пря-

мой $a$ можно получить как результат пересечения прямой $a$ с плоскостью $\beta$, в которой находится прямая $b$ и которая перпендикулярна параллельным плоскостям, в которых лежат прямые $a$ и $b$. Задача не имеет решения, если $d$ меньше расстояния между полученными точками.

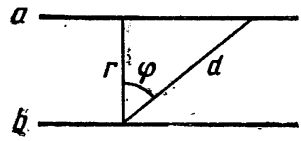


Рис. 127

Если $d$ равняется этому расстоянию, то отрезок, соединяющий полученные точки, искомый. В самом деле, он составляет и с $a$, и с $b$ прямые углы, т. е. равные.

Если же величина $d$ больше расстояния $r$ между найденными точками и острый угол между $d$ и перпендикуляром к плоскостям равен $\varphi$, то проекции $d$ на каждую из параллельных плоскостей равны

$$d \cdot \sin \varphi = \sqrt{d^2 - r^2} \text{ (рис. 127),}$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d}.$$

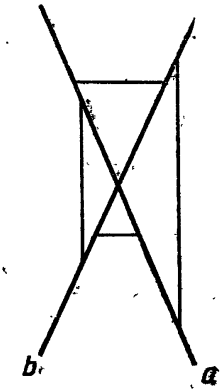


Рис. 128

Для того чтобы углы данного отрезка длиной $d$ с $a$ и с $b$ были равны, достаточно иметь равные углы между проекцией этого отрезка на параллельные плоскости и прямыми $a$ и $b$.

Если смотреть по направлению перпендикуляра к параллельным плоскостям, одной из которых принадлежит прямая $a$, а другой — прямая $b$, то прямые $a$ и $b$ будем видеть пересекающимися и между ними надо поместить отрезок длиной $\sqrt{d^2 - r^2}$ так, чтобы он составлял с этими прямыми равные углы, т. е. отсекал бы от них равнобедренные треугольники. Это можно сделать четырьмя способами (см. рис. 128, где вертикальные и горизонтальные отрезки прямых иллюстрируют возможные положения проекций рассматриваемого отрезка).

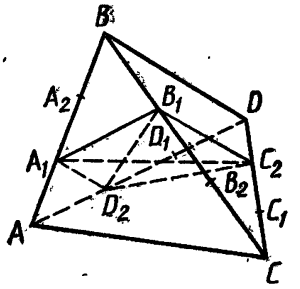


Рис. 129

11. Достроим пространственный четырехугольник $ABCD$ до тетраэдра. Для этого проведем в нем две диагонали $BD$ и $AC$ (рис. 129). Пусть $A_1$ и $A_2$, $B_1$ и $B_2$, $C_1$ и $C_2$, $D_1$ и $D_2$ — точки деления соответственно сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$.

Покажем, что, например, пара прямых $A_1C_2$ и $B_1D_2$ пересекается. Отрезки $A_1D_2$, $B_1C_2$ параллельны отрезку $BD$. Следовательно, отрезки $B_1D_2$ и $A_1C_2$ являются диагоналями трапеции $A_1B_1C_2D_2$ и поэтому пересекаются, что и требовалось. Аналогично доказывается, что $A_2C_1$ пересекается с $B_1D_2$ и т. д.

**12.** $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ и $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$. Складывая эти равенства, получаем требуемое векторное равенство:

$$4 \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

**13.** Рассмотрим четырехугольник $AA_1B_1B$. Пусть $A_2$ — середина отрезка $AA_1$, а $B_2$ — середина отрезка $BB_1$. Проведем отрезок $A_2B_2$ и введем ориентацию на отрезках так, как показано на рисунке 130. В результате получим: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{B_2A_2} + \overrightarrow{A_2A} = \vec{0}$. Аналогично $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = \vec{0}$. Кроме этого, $\overrightarrow{A_2A} + \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{BB_2} = \vec{0}$. Теперь, сложив два предыдущих равенства, получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1} = -2\overrightarrow{B_2A_2}$ и $\overrightarrow{A_2B_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1})$. Точно так же находим, что

$$\overrightarrow{B_2C_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1}),$$

$$\overrightarrow{C_2D_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C_1D_1}),\ \overrightarrow{D_2A_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{D_1A_1}).$$

Равенство $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$ следует теперь из равенств $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$. Поэтому четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм.

**14.** Введем в рассмотрение векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$. Тогда $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$, $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA})$. Если сложить вектор $\overrightarrow{PQ}$ с вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PR}$ с $\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PS}$ с $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$, то во всех трех случаях получим векторы, равные $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, т. е. в результате каждого из сложений из начальной точки $P$ попадем в одну и ту же конечную точку. А она по построению находится в пересечении прямых $a$, $b$ и $c$. Действительно, вектор $\overrightarrow{PC}$ откладывается от точки $Q$ по прямой $a$, вектор $\overrightarrow{PA}$ — от точки $R$ по прямой $b$, а вектор $\overrightarrow{PB}$ — от точки $S$ по прямой $c$.

**15.** Данный многоугольник разобьем на треугольники и трапеции плоскостями, параллельными плоскости $\beta$. Для каждого треугольника и каждой трапеции, получающихся при этом, утверждение справедливо, поскольку их основания (идущие по линиям разреза) при проектировании не изменяют своей длины, а высоты, соответствующие этим основаниям, уменьшаются в $\cos\varphi$ раз. Суммируя площади проекций и вынося $\cos\varphi$ за скобки, получаем искомое.

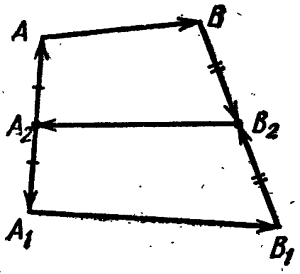


Рис. 130

**16.** У куба имеются три пары параллельных граней. Две стороны сечения, которое является пятиугольником, обязаны принадлежать параллельным граням. Поскольку они

лежат в одной плоскости (плоскости сечения), то должны быть параллельны между собой. Этот факт и приводит к противоречию, поскольку у правильного пятиугольника нет параллельных сторон.

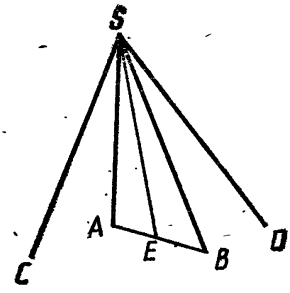


Рис. 131

## 10 класс

**17.** Выберем произвольно два противоположных ребра данного четырехгранного угла и проведем через них плоскость. На рисунке 131 это плоскость $ASB$. Пусть теперь $CSD$ — плоскость, содержащая ребра $CS$ и $DS$. Предположим, она пересекает плоскость $ASB$ по прямой $SE$.

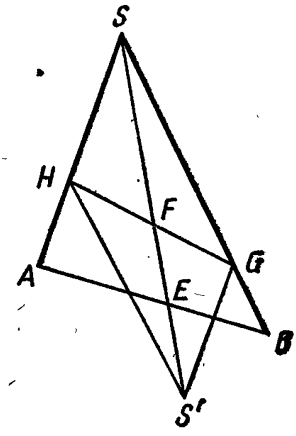


Рис. 132

Параллелограмм можно рассматривать как плоский четырехугольник, диагонали которого точкой их пересечения делятся пополам. Выберем на прямой $SE$ произвольно точку $F$ и проведем через нее прямую $HG$ (рис. 132), которая пересекает лучи $SA$ и $SB$ соответственно в точках $H$ и $G$, причем $HF = FG$. Это всегда можно сделать, причем единственным образом. (Например, повернуть угол $ASB$ относительно точки $F$ на 180°. Тогда луч $SH$ перейдет в параллельный луч $S'G$, луч $SG$ — в параллельный луч $S'H$.) Аналогично найдем в плоскости $CSD$ отрезок $KL$, который той же точкой $F$ делится пополам. Тогда диагонали $HG$ и $KL$ четырехугольника $HKGL$ точкой пересечения делятся пополам, значит, этот четырехугольник — параллелограмм.

Предложенная задача имеет бесконечное множество решений. Но каждое из них определяется однозначно выбором точки $F$.

**18.** Предположим для определенности, что наибольшим из четырех ребер данного тетраэдра является ребро $AD$. Если это не так, то вершины тетраэдра можно переименовать.

Утверждение, высказанное в условии задачи, будет доказано, если окажется справедливым хотя бы одно из неравенств

$$AC + AB > AD \text{ и } DB + DC > AD.$$

Предположим противное. Тогда получим, что $AC + AB \leqslant AD$ (*) и $DB + DC \leqslant AD$ (**), причем оба неравенства выполняются одновременно. Сложим эти неравенства:

$$AD + DC + AB + DB \leqslant 2AD.$$

Из треугольников $ACD$ и $ABD$ получаем неравенства $AC + DC > AD$ и $AB + DB > AD$, которые тоже выполняются одновременно. Сложив их, получаем неравенство $AC + DC + AB + DB > 2AD$,

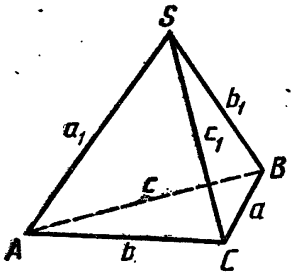



Рис. 133

которое противоречит полученному. Значит, предположение, что оба неравенства (*) и (**) одновременно справедливы, ложно, и, значит, найдется хотя бы одна вершина тетраэдра, обладающая сформулированным в условии задачи свойством.

**19.** Из построения ясно, что $ABA'C$ — параллелограмм. Имеем: $AC = BA'$, $AC = BC'$. В треугольнике $C'DA'DB$ — медиана. Если же медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный. Итак, грань $DA'C'$ — прямоугольный треугольник. Точно так же можно доказать и что грани $DB'A'$ и $DC'B'$ — прямоугольные треугольники.

**20.** Два. Эти тетраэдры симметричны относительно плоскости «среднего» треугольника развертки.

**21.** Пусть ребра тетраэдра имеют длины $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ (рис. 133). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} a + b_1 + c_1 &= P, \\ a_1 + b_1 + c &= P, \\ a_1 + c_1 + b &= P, \\ c + a + b &= P. \end{aligned}$$

Найдем сумму первых трех из этих равенств. Получим: $(a + b + c) + 2(a_1 + b_1 + c_1) = 3P$. Откуда $a_1 + b_1 + c_1 = P$. Сравнивая последнее из полученных равенств с первым, получим, что $a = a_1$, сравнивая со вторым, получим, что $b = b_1$, с третьим — что $c = c_1$. Замечаем теперь, что в каждой грани имеется ребро $a$ (или $a_1$), $b$ (или $b_1$), $c$ (или $c_1$). Поэтому каждая грань является треугольником со сторонами, равными $a$, $b$ и $c$.

**22.** Сумма двух плоских углов в каждой вершине тетраэдра больше третьего. Трехгранных углов четыре — по числу вершин тетраэдра. Предположив, что в каждом трехгранном угле есть хотя бы один тупой плоский угол, получим, что сумма всех плоских углов тетраэдра строго больше $4\pi$. Кроме того, граней у тетраэдра четыре и сумма

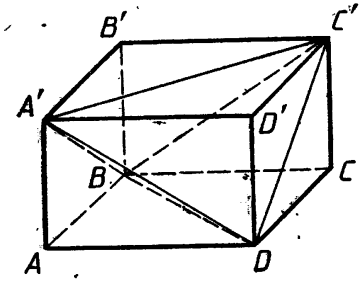



Рис. 134

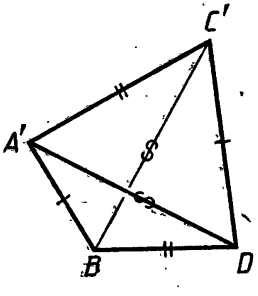



Рис. 135

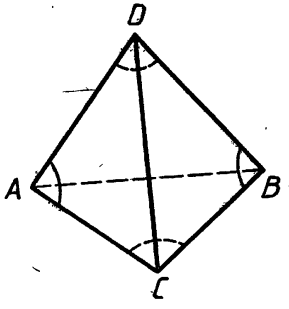



Рис. 136

плоских углов в каждой грани равна $\pi$. Следовательно, сумма всех плоских углов тетраэдра равна $4\pi$. Предположение о том, что у всех трехгранных углов тетраэдра нашелся хотя бы один плоский тупой угол, привело к противоречию.

23. Предположим, что требуемое сечение получено и оно проходит через три вершины $A'$, $B$ и $D$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 134). Это сечение отделяет от параллелепипеда тетраэдр $AA'BD$, вершина $A$ которого является вершиной трехгранного угла. Проведем еще такие сечения: $A'C'D$ (отсекающее от параллелепипеда тетраэдр $A'C'DD'$, равный тетраэдру $AA'BD$), $BDC'$ и $A'C'B$. В результате от рассматриваемого параллелепипеда окажутся отсечены четыре тетраэдра и останется пятый $A'BC'D$, ребра которого — диагонали параллелепипеда (рис. 135). Каждая из граней этого тетраэдра равна данному треугольнику (противоположные его ребра равны). Нетрудно построить развертку такого тетраэдра, а следовательно, и сам тетраэдр $A'BC'D$. Проведя теперь через противоположные ребра $A'B$ и $C'D$, $BD$ и $A'C'$, $BC'$ и $A'D$ попарно параллельные плоскости (сделать это можно единственным способом), восстанавливаем прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ и получаем в результате требуемое сечение.

24. Рассмотрим пространственный четырехугольник $DACB$ (рис. 136). Надо доказать, что $\angle DBC + \angle DAC + \angle ADB + \angle ACB < 360^\circ$ (*). Проведем отрезки прямых $CD$ и $AB$, получим тетраэдр $DACB$. Воспользовавшись тем, что один из плоских углов трехгранного угла меньше суммы двух других, получаем неравенства

$$\angle DBA + \angle ABC > \angle DBC,$$
$$\angle DAB + \angle BAC > \angle DAC.$$

Сложив эти неравенства, имеем:

$$\angle DBA + \angle DAB + \angle ABC + \angle BAC > \angle DBC + \angle DAC.$$

Но $\angle DBA + \angle DAB = 180^\circ - \angle ADB$ и $\angle ABC + \angle BAC = 180^\circ - \angle ACB$. Поэтому $180^\circ - \angle ADB + 180^\circ - \angle ACB > \angle DBC + \angle DAC$. Отсюда следует требуемое неравенство (*).

25. Соединим отрезками прямых точки $M$ и $D$, $M$ и $A$, $M$ и $B$, $M$ и $C$. Если удастся доказать, что хотя бы один из трех треугольников $AMD$, $CMD$ и $BMD$ тупоугольный с тупым углом в точке $M$, то доказательство, требуемое в условии задачи, провести нетрудно. Пусть, например, тупым является угол $AMD$ в одноименном треугольнике. Тогда $AD > AM$, поскольку в треугольнике против тупого угла лежит бо́льшая из его сторон (рис. 137).

Проведем теперь через точку $M$ плоскость, перпендикулярную прямой $MD$. При этом хотя бы одна из вершин данного тетраэдра $A$, $B$ или $C$ должна лежать с точкой $D$ в разных полупространствах, на которые пространство делится проведенной через точку $M$ плоскостью. Действительно, если бы все четыре вершины тетраэдра лежали в одном полупространстве, то точка $M$ не была бы внутренней для тетраэдра. Пусть, например, точка $A$ и точка $D$ лежат по разные стороны

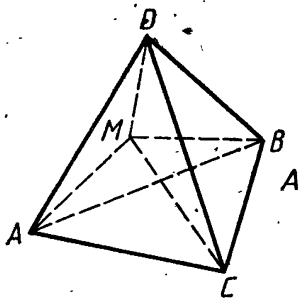



Рис. 137

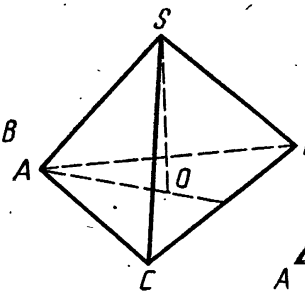



Рис. 138

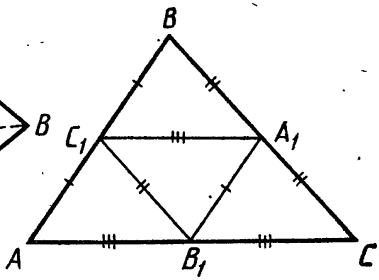



Рис. 139

от секущей плоскости. Но тогда угол $AMD$ больше прямого, т. е. тупой, что и требовалось.

**26.** Рассмотрим, например, тетраэдр $SABC$, у которого взаимно перпендикулярны ребра $AS$ и $BC$ (рис. 138). Плоскость, перпендикулярная ребру $BC$ и проходящая через точку $S$, должна содержать ребро $AS$ и высоту тетраэдра, проходящую через его вершину $S$. Таким образом, основание $O$ высоты тетраэдра принадлежит высоте основания, опущенной из точки $A$ на сторону $BC$.

Поскольку $SC$ перпендикулярна $AB$, то плоскость, проведенная через ребро $SC$ перпендикулярно $AB$, содержит основание высоты $O$ и т. д. Такое рассуждение можно провести для высот каждой из граней данного тетраэдра.

**27.** Пусть $A_1B_1C_1$ — основание некоторого тетраэдра $EA_1B_1C_1$ (рис. 139). Нужно показать, что треугольник $ABC$, для которого $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $C_1A_1$ служат средними линиями, может рассматриваться как его развертка. Высота треугольника $ABC$, проведенная из вершины $A$, перпендикулярна не только стороне $BC$, но и его средней линии $B_1C_1$, высота, проведенная из вершины $B$, перпендикулярна средней линии $C_1A_1$ и высота, проведенная из вершины $C$, перпендикулярна средней линии $A_1B_1$. При повороте треугольника $A_1B_1C$ около $A_1B_1$ вершина $C$ перемещается в плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника $ABC$ и прямой $A_1B_1$. Точно так же, если треугольник $AB_1C_1$ поворачивать около $B_1C_1$, то вершина $A$ будет перемещаться в плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника $ABC$ и прямой $B_1C_1$. Если, наконец, треугольник $A_1BC_1$ поворачивать около $A_1C_1$, то вершина $B$ будет перемещаться в плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника $ABC$ и прямой $A_1C_1$. Все эти три плоскости, перпендикулярные плоскости треугольника $ABC$, пересекаются по прямой $l$, перпендикулярной плоскости $ABC$. Выделим из этих трех плоскостей одну, которая проходит через точку $B$. Пусть она пересекает $A_1C_1$ в точке $H$.

Прямая $l$ пересекает плоскость треугольника $ABC$ в точке пересечения его высот $D$. В результате треугольник $A_1B_1C_1$ может рассматриваться как проекция тетраэдров, четвертая вершина $S$ которых лежит на прямой $l$, на плоскость треугольника $ABC$, причем точка $D$ —

проекция вершины $S$. Нам нужно из этих тетраэдров выбрать такой, для которого треугольник $ABC$ служит разверткой.

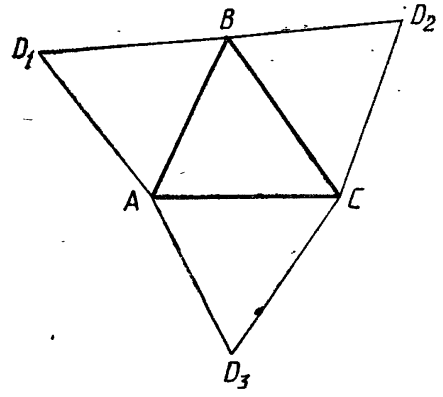


Рис. 140

Из точки $A_1$ радиусом $A_1B$ сделаем засечку на прямой $l$ и обозначим ее буквой $E$. Покажем, что эта точка и служит четвертой вершиной искомого тетраэдра. Соединим $E$ отрезками прямых с точками $B_1$ и $C_1$. Проведем также отрезки $BH$ и $EH$. Замечаем, что треугольники $BA_1H$ и $EA_1H$ оказываются равными по гипотенузам и общему катету. Следовательно, углы $BA_1H$ и $EA_1H$ равны. Поэтому по двум сторонам и углам между ними равны треугольники $A_1BC_1$ и $A_1EC_1$. Аналогичным путем можно доказать попарные равенства треугольников $B_1CC_1$ и $B_1EC_1$, $B_1AA_1$ и $B_1EA_1$, откуда и следует, что треугольник $ABC$ является разверткой тетраэдра $EABC$.

Отвечая на второй вопрос задачи, замечаем, что если бы был в развертке тетраэдра тупой плоский угол, то у тетраэдра при каждом из его трехгранных углов был плоский тупой угол, что невозможно (см. задачу 22).

**28.** Видим, что отрезки $B_1C$ и $C_1A_1$, $AC_1$ и $A_1B_1$, $BA_1$ и $B_1C_1$ (рис. 139) равны, откуда и следует справедливость высказанного в задаче утверждения.

**29.** Рассмотрим произвольную грань $ABC$ тетраэдра $ABCD$ с равновеликими гранями. Грань $ABC$ станем считать основанием тетраэдра. Пусть известны длины ребер $AD$, $BD$ и $CD$. Развертку тетраэдра в плоскости $ABC$ можно получить геометрически построениями: проведем окружности радиуса $BD$ (из вершины $B$), радиуса $CD$ (из вершины $C$), радиуса $AD$ (из вершины $A$). В качестве вершин развертки $D_1$, $D_2$ и $D_3$ годятся только три из шести точек попарного пересечения этих окружностей (рис. 140). Они лежат в тех полуплоскостях, определяемых прямыми $AB$, $BC$ и $CA$, которые для треугольника $ABC$ являются внешними, поскольку, строя развертку, мы перегибаем грани тетраэдра каждый раз во внешние полуплоскости. При этом должно быть:

$$AD_1 = AD_3, \quad BD_1 = BD_2, \quad CD_2 = CD_3.$$

Кроме того, поскольку грани тетраэдра равновелики, то равновелики и треугольники $ABC$, $BD_2C$, $CD_3A$ и $AD_1B$. Поэтому высота треугольника $ABC$, опущенная из вершины $A$ на сторону $BC$, должна быть равна высоте, опущенной из вершины $D_2$ на сторону $BC$ треугольника $BD_2C$ и т. д.

Следовательно, вершина $D_2$ должна находиться на прямой $a$, отстоящей от стороны $BC$ во «внешнюю» сторону на такое же расстояние, как вершина $A$ во «внутреннюю» сторону. Вершина $D_3$ должна

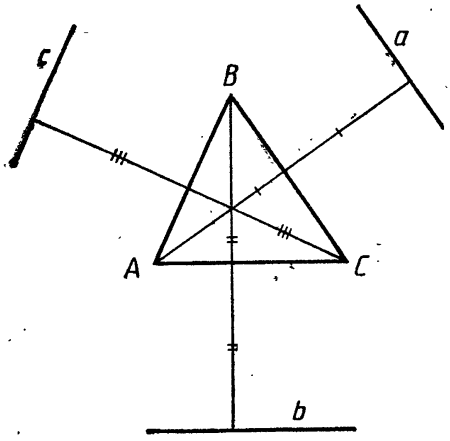



Рис. 141

находиться аналогичным образом на прямой $b$, а вершина $D_1$ — на прямой $c$ (рис. 141). Тетраэдр вида $T$ обладает этими свойствами.

Предположим, что найдется еще один тетраэдр (не вида $T$), который обладает теми же свойствами. Пусть в его развертке четвертая вершина определит на прямой $a$ положение $D_2'$, на $b$ — $D_3'$, на $c$ — $D_1'$. Примем для определенности, что $BD_2' > BD_2$. Чтобы точка $D_2'$ оставалась на $a$, необходимо выполнение неравенств $D_2'C < D_2C$, $CD_3' < CD_3$ и $D_1'B > D_1B$. Поэтому $D_1'A < D_1A$. Но $D_1'A = D_3'A$. Следовательно, в треугольнике $AD_3'C$ сторона $AD_3'$ меньше, чем $AD_3$, а сторона $CD_3'$ меньше, чем $CD_3$. Поэтому точка $D_3'$ не может лежать на $b$ и тетраэдр, удовлетворяющий условию задачи, обязательно принадлежит виду $T$.

**30.** Искомое множество точек заключено между координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{z}{7} = 1$ (*) (рис. 142). Как практически получить любое из значений координат $a$, $b$ и $c$?

Значение $a$ выбираем произвольно при ограничениях $0 < a \leqslant 5$. Считаем $a$, естественно, теперь числом известным и переносим его в уравнении (*) в правую часть $\frac{b}{6} + \frac{c}{7} = 1 - \frac{a}{5}$ (**). Значение $b$ выбираем также произвольно при ограничениях $0 < b \leqslant 6$. Подставляем это значение вместе со значением $a$ в данное неравенство и находим соответствующее значение $c$, причем должно быть $0 < c \leqslant 7$.

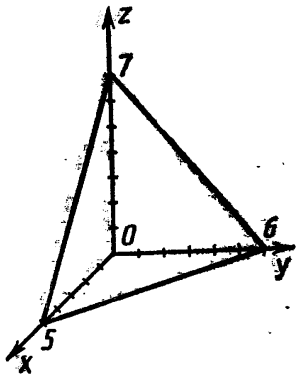



Рис. 142

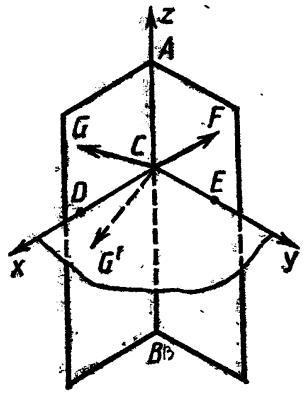



Рис. 143

31. Угол $DCE$ — линейный угол данного двугранного угла, и, следовательно, он прямой. Пусть ось абсцисс направлена из точки $C$ по лучу $CD$, ось ординат — по лучу $CE$, ось аппликат — по лучу $CA$ (рис. 143). Рассмотрим векторы $\overline{CF} = (0; a_y; a_z)$, где $a_y$ и $a_z$ — некоторые положительные числа, и $\overline{CG} = (b_x; 0; b_z)$, где $b_x$ и $b_z$ также положительные числа. Скалярное произведение векторов $\overline{CF}$ и $\overline{CG}$ равно $\sqrt{a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_z^2} \cdot \cos\varphi$, где $\varphi$ — величина угла $FCG$. Это произведение равно $a_z \cdot b_z$. Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_z^2}} > 0$. Таким образом, получаем, что угол $\varphi$ острый (раз $\cos\varphi > 0$).

Рассмотрим теперь скалярное произведение векторов $\overline{CF}$ и $\overline{CG'}$, находящихся по разные стороны от плоскости $DCE$. $\overline{CG'} = (b'_x; 0; b'_z)$, где $b'_x$ — положительное число, а $b'_z$ — отрицательное. Аналогично предыдущему получаем, что $\cos\varphi = \dfrac{a_z \cdot b'_z}{\sqrt{a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x'^2 + b_z'^2}} < 0$, где угол $\varphi$ — величина угла $FCG'$, поэтому угол $FCG'$ тупой, что и следовало показать.

32. Введем пространственную систему координат. Отметим на осях координат три точки $A = (1; 0; 0)$, $B = (0; 1; 0)$, $C = (0; 0; 1)$. Эти точки могут рассматриваться как вершины равностороннего треугольника. Уравнение плоскости, которая проходит через эти три точки, $x + y + z = 1$.

Запишем теперь уравнение окружности, описанной около данного треугольника. Сделать это можно так. Рассмотрим сферу, которой принадлежат точки $A$, $B$, $C$ и центр которой находится в начале координат. Ее уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Окружность, описанная около данного треугольника, — линия пересечения плоскости $x + y + z = 1$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Рассмотрим на данной окружности произвольную точку $M$ с координатами $x$, $y$, $z$. Квадрат ее расстояния до точки $A$ равен $(x - 1)^2 + y^2 + z^2$, квадрат расстояния до точки $B$ равен $x^2 + (y - 1)^2 + z^2$, квадрат расстояния до точки $C$ равен $x^2 + y^2 + (z - 1)^2$. Найдем сумму этих квадратов и покажем, что она является величиной постоянной. Действительно, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y - 1)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2(x + y + z) + 3 = 3 - 2 + 3 = 4$, что и требовалось.

33. Координатные плоскости разделяют пространство на восемь равных частей, так называемых октантов. Данное уравнение в каждом октанте, рассматриваемом отдельно, задает часть плоскости, а именно равносторонний треугольник, стороны которого равны $\sqrt{2}$, а вершины находятся на координатных осях. Такой треугольник — одна из восьми граней правильного многогранника, называемого октаэдром.

34. Воспользуемся результатом, полученным при решении планиметрической задачи 71. Обратим внимание, что в ходе решения мы

нигде не использовали тот факт, что точка $D$ лежит в плоскости треугольника $ABC$. Значит, доказываемое в этой задаче равенство остается справедливым для случая, когда точки $A$, $B$, $C$ и $D$ являются вершинами тетраэдра.

Пусть теперь противоположные ребра тетраэдра $AB$ и $CD$, $BC$ и $AD$ взаимно перпендикулярны. Но тогда справедливы равенства $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, $\overline{BC} \cdot \overline{AD} = 0$. Значит, $\overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$, т. е. $AC$ и $BD$ взаимно перпендикулярны.

35. Предположим противное. Рассмотрим многогранные углы при вершинах получившегося многогранника. Поскольку углов при каждой вершине четыре, а их сумма меньше четырех прямых углов, то среднее арифметическое значение угла по всему многограннику оказывается меньше 90°.

Используем теперь тот факт, что сумма внутренних углов всякого плоского выпуклого четырехугольника равна 360°. Поэтому сумма углов во всех гранях не меньше $360° \cdot n$, где $n$ — число граней, а на каждый угол приходится в среднем $\frac{360° \cdot n}{4n}$, т. е. 90°. Полученное противоречие и доказывает высказанное в условии задачи утверждение.

36. Покажем, что четыре точки, не лежащие в одной плоскости, определяют сферу, описанную около тетраэдра с вершинами в этих точках.

Три данные точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$, не лежащие на одной прямой, определяют окружность. Точки пространства, которые равноудалены от этой окружности, лежат на прямой (оси), перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через ее центр. Рассмотрим данную точку $M_4$, не принадлежащую плоскости, в которой лежат точки $M_1$, $M_2$, $M_3$. Проведем плоскость через точку $M_4$ и ось. Она пересечет окружность в точках $M_5$ и $M_6$. Выберем из них одну, например $M_5$. Найдем на оси точку, равноудаленную от точек $M_4$ и $M_5$. Для этого соединим отрезком прямой точки $M_4$ и $M_5$ и построим перпендикуляр к отрезку $M_4M_5$ через его середину до пересечения с осью. Точка пересечения перпендикуляра и оси является центром сферы $O$, проходящей через данные точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ и $M_4$, т. е. описанной около тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$. Действительно, точка $O$ равноудалена от всех данных точек $M_1$, $M_2$, $M_3$ и $M_4$[1].

Плоскости, о которых идет речь в условии задачи, представляют собой геометрические места точек, равноудаленных от попарно взятых из четырех точек. А так как точка $O$ равноудалена от всех четырех точек, то, значит, она лежит во всех этих плоскостях, т. е. плоскости пересекаются в одной точке.

37. Пусть, например, равны противоположные ребра $BD$ и $AC$ тетраэдра $ABCD$. В описанном около этого тетраэдра параллелепипеде

---

[1] К такому же результату можно было прийти и аналитически. Рассмотрим уравнение сферы $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Задав четыре точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, $M_4(x_4; y_4; z_4)$, мы получим систему из четырех уравнений с неизвестными $x_0$, $y_0$, $z_0$, $R$, определяющих положение центра сферы, описанной около тетраэдра, и радиус этой сферы.

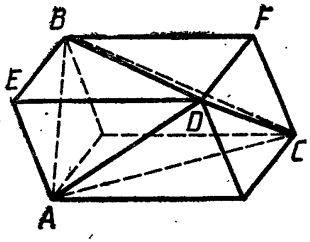



Рис. 144

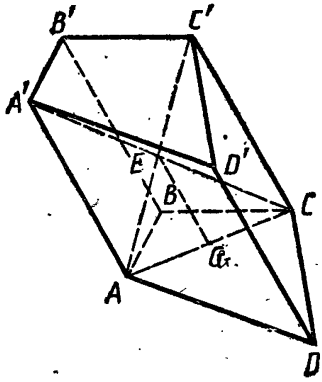



Рис. 145

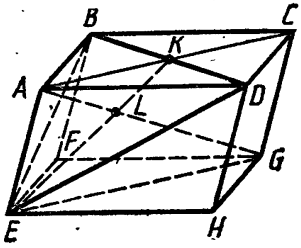



Рис. 146

(рис. 144) ребро $BD$ является диагональю одной из его граней, а противоположное ему ребро $AC$ — диагональю противоположной грани параллелепипеда. Эта диагональ равна диагонали $EF$. Итак, у параллелограмма $EBFD$ диагонали $BD$ и $EF$ равны, значит, этот параллелограмм является прямоугольником.

**38.** Поскольку данная пространственная фигура — призма, то плоские фигуры $AA'C'C$ и $BB'D'D$ — параллелограммы (рис. 145). Следовательно, диагонали данной призмы $AC'$ и $A'C$, являющиеся одновременно диагоналями параллелограмма $AA'C'C$, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Обозначим точку пересечения буквой $E$. Аналогично рассуждая, получим, что диагонали призмы $BD'$ и $B'D$ (они на рисунке не указаны) пересекаются в их середине. Обозначим ее буквой $F$. Пусть теперь точка $G$ — середина диагонали $AC$ нижнего основания призмы. Тогда отрезок прямой $EG$ равен половине ребра $AA'$ данной призмы и параллелен ему. Примем точно так же, что точка $H$ — середина диагонали $BD$. Тогда отрезок $FH$ равен половине ребра $BB'$ данной призмы и параллелен ему. Но все боковые ребра призмы равны и параллельны. Значит, отрезки $EG$ и $FH$ равны и параллельны. Следовательно, фигура $EFHG$ — параллелограмм и поэтому точка $E$ находится от точки $F$ на таком же расстоянии, на каком точка $G$ от точки $H$.

**39.** Проведем в гранях $ABCD$ и $EFGH$ диагонали $AC$ и $EG$. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AK = KC$ (рис. 146). В параллелограмме $ACGE$ отрезок прямой соединяет вершину $E$ с серединой стороны $AC$. Такой отрезок $EK$ отсекает от диагонали параллелограмма $AG$ одну треть. Поэтому длины отрезков $AL$ и $LG$ относятся как $1 : 2$.

**40.** Проведем плоскость через точки $A$, $A'$ и $C'$. Точки $B$ и $D$ лежат на перпендикуляре к этой плоскости и на равных от нее расстояниях. Точка $A'$ принадлежит плоскости $AA'C'$. Следовательно, треугольник $BDA'$ симметричен относительно $AA'C'$. А раз это так, то плоскость $AA'C'$ перпендикулярна плоскости треугольника $BDA'$. Точно так же убедимся, что плоскость треугольника $BDA'$ перпендикулярна плоскости $ADC'$. Прямая $AC'$ есть линия пересечения двух плоскостей

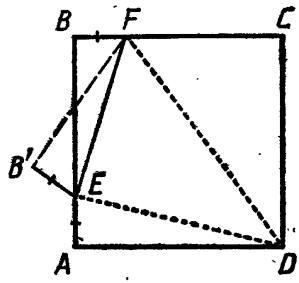


Рис. 147

$ADC'$ и $AA'C'$, перпендикулярных плоскости $BDA'$. Значит, прямая $AC'$ перпендикулярна $BDA'$.

**41.** Отложим на сторонах квадрата $ABCD$ равные отрезки $AE = BF$ (рис. 147). Точки $E$ и $F$ соединим отрезком прямой. Разрежем по прямой $EF$. Треугольник $EBF$ перевернем другой стороной плоскости и вновь приложим по гипотенузе. Он займет положение $EFB'$. Требуемая развертка получена.

**42.** Утверждение задачи является следствием результата, полученного в задаче 15.

**43.** Требуемую операцию можно осуществить, например, так. Выберем произвольно одну из вершин куба. В этой вершине сходится три ребра. Возьмем одно из них и разделим его на три равные части. Через обе точки деления проведем плоскости, параллельные грани, которая перпендикулярна выбранному ребру. Аналогично поступим со вторым и с третьим ребром. В результате данный куб окажется разделенным на 27 маленьких кубов, как и требовалось. Покажем теперь, что меньше чем шестью разрезами обойтись нельзя. Действительно, один из кубов, получившийся в результате разделения, имеет в качестве всех шести граней плоскости разрезов. Каждая из его граней получается в результате отдельного разреза. Так что шесть разрезов придется сделать.

**44.** Куб можно разделить тремя разрезами $A$, $B$ и $C$ на 8 меньших кубов так, как это показано на рисунке 148. Выполнив разрез $A$, поставим один из получившихся прямоугольных параллелепипедов на другой и осуществим разрез $A_1$ (рис. 149). Разделять четыре получившихся пластины-параллелепипеды не станем, а вернем их в первоначальное положение так, чтобы получился прежний большой куб. Затем аналогично разрезам $A$ и $A_1$ выполним разрезы $B$ и $B_1$, вернем получившиеся параллелепипеды-столбики на прежние места. Теперь выполним разрезы $C$ и $C_1$. В результате этих шести разрезов $A$, $A_1$, $B$, $B_1$, $C$ и $C_1$ данный куб разделен на 64 малых равных кубов, как и требовалось.

**45.** а) Ясно, что площадь поверхности куба равна 6 квадратным единицам. Площадь каждого сечения равна 1 квадратной единице.

При проведении каждой плоскости сечения площадь открытых поверхностей увеличивается на 2 квадратные единицы (одна единица поверхности принадлежит отделенной части, другая — остающейся). При проведении $(n-1)$ плоскостей разреза общая поверхность увеличивается на $2(n-1)$ квадратных единиц. При проведении $3(n-1)$ плоскостей дробления общая поверхность увеличивается на $6(n-1)$ квадратных единиц. Новая площадь поверхности составит, таким образом, вместе с начальной $6(n-1)+6=6n$ квадратных единиц, т. е. увеличится в $n$ раз.

б) В данном случае затраченная работа пропорциональна числу

плоскостей сечения и поэтому составит $3A(n-1)$ единиц работы.

**46.** Примем трехгранный угол за координатный $Oxyz$ (рис. 150). Тогда грань, о которой говорится в условии задачи, есть треугольник $ABC$. Координаты его вершин:

$$A\ (x;\ 0;\ 0),\ B\ (0;\ y;\ 0),\ C\ (0;\ 0;\ z).$$

Воспользовавшись трижды теоремой Пифагора, запишем систему уравнений, в которой неизвестными являются $x$, $y$ и $z$:

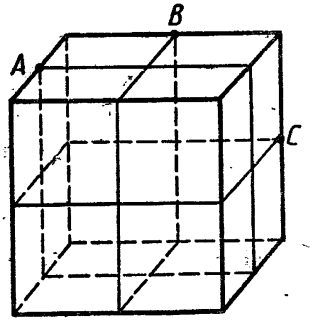


Рис. 148

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем (отрицательные корни, естественно, смысла не имеют):

$$x = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}},$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}},$$

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

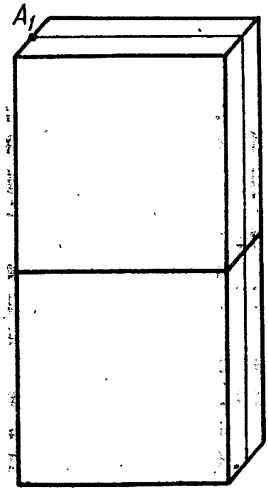


Рис. 149

**47.** Пусть координаты данных точек: $A\ (a_1;\ a_2;\ 0)$, $B\ (0;\ b_1;\ b_2)$, $C\ (c_1;\ 0;\ c_2)$. Плоскость искомого треугольника пересекается с плоскостью $Oxy$ по прямой, уравнение которой можно записать так: $\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} = 1$. Точка с координатами $(a_1;\ a_2;\ 0)$ должна лежать на этой прямой. Поэтому должно соблюдаться равенство $\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} = 1$. Рассматривая две другие координатные плоскости, получаем аналогично еще два уравнения. В результате имеем систему относительно неизвестных $p_1$, $p_2$ и $p_3$.

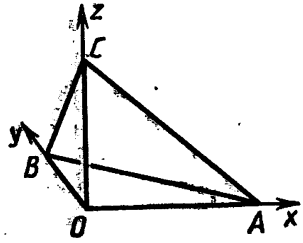


Рис. 150

$$\begin{cases} \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} = 1, \\ \frac{b_1}{p_2} + \frac{b_2}{p_3} = 1, \\ \frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_3} = 1. \end{cases}$$

Введем подстановку $y_1 = \frac{1}{p_1}$; $y_2 = \frac{1}{p_2}$; $y_3 = \frac{1}{p_3}$. После такой подстановки система алгебраических уравнений становится линейной и принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1y_1 + a_2y_2 &= 1, \\ b_1y_2 + b_2y_3 &= 1, \\ c_1y_1 + c_2y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Последовательно исключая неизвестные, получаем:

$$p_1 = \frac{a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2}{b_1c_2 - a_2c_2 + a_2b_2};$$

$$p_2 = \frac{a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2}{a_1c_2 - a_1b_2 + b_2c_1};$$

$$p_3 = \frac{a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2}{a_2c_1 + a_1b_1 - b_1c_1}.$$

**48.** Пусть дан правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого $a$. Сечение его плоскостью — четырехугольник $MQPN$, причем вершины $M$, $Q$, $P$ и $N$ расположены соответственно на ребрах $AD$, $BD$, $BC$ и $AC$. Любая плоскость, параллельная ребру $CD$ данного правильного тетраэдра, параллельна и его ребру $AB$, расположенному на прямой, скрещивающейся с прямой $CD$. Имеем: $MQ \parallel AB$ и $MN \parallel CD$. Но в правильном тетраэдре противоположные ребра $AB$ и $CD$ взаимно перпендикулярны. Значит, взаимно перпендикулярны смежные стороны $MQ$ и $MN$ плоского четырехугольника $MQPN$. Точно так же можно доказать перпендикулярность его двух других смежных сторон. Следовательно, $MQPN$ — прямоугольник. Примем теперь, что $MQ = x$. Из подобия треугольников $MDQ$ и $ADB$ получаем, что $BD : DQ = a : x$. Но $BD = a$ и, следовательно, $DQ = x$, $BQ = a - x$. Из подобия треугольников $BQP$ и $BDC$ находим, что $QP : DC = (a - x) : a$. Но $DC = a$, и поэтому $QP = a - x$. Половина периметра четырехугольника $MQPN$ оказывается равной $x + a - x = a$, а весь периметр равен $2a$, что и требовалось доказать.

**49.** Объем тетраэдра $DABC$ равен трети произведения площади его основания (треугольника $ABC$) на расстояние от точки $D$ до плоскости грани $ABC$. Если перемещать сторону $BC$ треугольника $ABC$ вдоль прямой, на которой она лежит, и соединять каждый раз новые концы отрезка $BC$ с вершиной тетраэдра $D$, то объемы всех получающихся в результате этой процедуры тетраэдров равны. Действительно, расстояние от точки $A$ до прямой $b$ не изменяется, поэтому не меняется площадь основания тетраэдра $ABC$. Основание нового тетраэдра останется в той же плоскости, что и основание прежнего, поэтому сохранит свое значение и высота тетраэдра — расстояние от точки $D$ до плоскости $ABC$. Получим, что объем тетраэдра $DAB'C'$ равен объему тетраэдра $DABC$.

Точно так же переместим теперь отрезок $DA$ в положение $D'A'$. Рассуждая аналогично, получим, что объем тетраэдра $D'A'B'C'$ равен объему тетраэдра $DAB'C'$. Значит, объемы тетраэдров $D'A'B'C'$ и $DABC$ равны.

50. Данная задача решается аналогично соответствующей планиметрической задаче — доказать, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до его сторон есть величина постоянная.

Берем произвольную внутреннюю точку тетраэдра и соединяем ее отрезками прямых с его вершинами (в планиметрической задаче точка соединялась отрезками прямых с вершинами данного правильного треугольника). Тетраэдр разбивается на четыре, вообще говоря, неправильных тетраэдра. Объем каждого равен трети произведения его высоты на основание. Основания у всех малых тетраэдров одинаковые — правильные треугольники. Поэтому получаем, что объем данного правильного тетраэдра равен $\frac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)\,S$, где $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ — расстояния от выбранной точки до соответствующих граней, а $S$ — площадь грани данного тетраэдра. Кроме того, объем данного тетраэдра равен произведению $\frac{hS}{3}$, где $h$ — его высота. Приравнивая два выражения для объема тетраэдра, находим, что $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$, т. е. что искомая сумма расстояний есть величина постоянная, что и требовалось.

Чтобы дать ответ на второе задание, заметим, что в процессе решения не использовалось требование, чтобы грани данного тетраэдра были именно равносторонними треугольниками. Достаточно было, чтобы они имели одинаковые площади. Значит, указанным свойством обладает тетраэдр, все грани которого — равновеликие треугольники.

51. Рассмотрим тетраэдр $DABC$, и пусть точка $P$ — середина ребра $DA$, точка $Q$ — середина противоположного ему ребра $BC$ (рис. 151). Проведем через точки $P$ и $Q$ произвольную плоскость, которая пересекает ребра $BD$ и $AC$ соответственно в точках $R$ и $S$. Тем самым плоскостью $PRQS$ данный тетраэдр оказывается разбит на два многогранника $PRQSDC$ и $PRQSAB$ (оба многогранника обозначаем перечислением их вершин). Первый из этих многогранников плоскостью $DSQ$ разбивается на тетраэдр $DQSC$ и четырехугольную пирамиду $DPRQS$. Второй плоскостью $AQR$ разбивается на тетраэдр $ARBQ$ и четырехугольную пирамиду $APRQS$. Замечаем, что по условию точки $D$ и $A$ отстоят от точки $P$ пересечения $DA$ с плоскостью $PRQS$ на равных расстояниях. Следовательно, и объемы двух пирамид $DPRQS$ и $APRQS$, имеющих общее основание и одинаковые высоты, равны. Поэтому для того, чтобы доказать равенство объемов многогранников, требуемое в условии задачи, нужно установить лишь равенство объемов тетраэдров $DSQC$ и $ARBQ$.

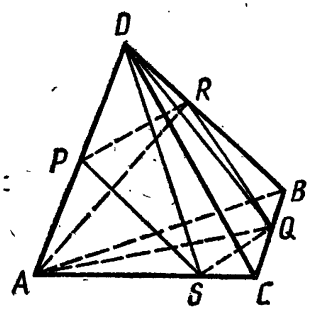


Рис. 151

Воспользуемся теперь результатом решения задачи 7. Выделим (мысленно) из тетраэдра пространственный четырехугольник общего вида $ADCB$. Тогда должно быть

$\frac{AS}{SC} = \frac{BR}{DR}$. У тетраэдров $DABC$ и $DSQC$ высоты, опущенные на основание из вершины $D$, равны. Поэтому их объемы относятся как площади треугольников $ABC$ и $SQC$. Угол $C$ у этих треугольников общий. Поэтому искомое отношение равно $\frac{AC \cdot BC}{SC \cdot CQ}$, причем $CQ = \frac{BC}{2}$. Пусть расстояния от точек $C$ и $A$ до плоскости $PRQS$ соответственно равны $h_C$ и $h_A$. Тогда $\frac{AS}{SC} = \frac{h_A}{h_C}$ и $\frac{AS}{SC} + 1 = \frac{h_A}{h_C} + 1 = \frac{h_A + h_C}{h_C} = \frac{AS + SC}{SC} = \frac{AC}{SC}$. Значит, отношение объемов тетраэдров $DABC$ и $DSQC$ равно $\frac{2(h_A + h_C)}{h_C}$. Точно так же получаем, что отношение объемов тетраэдров $ARBQ$ и $ADBC$ равно $\frac{2(h_B + h_D)}{h_B}$. При этом $h_B = h_C$, $h_D = h_A$, следовательно, оба тетраэдра $DQCS$ и $ARBQ$ составляют по объему одинаковую часть тетраэдра $DABC$, т. е. они равновелики.

**52.** Ясно, что площади треугольников $DB'C'$ и $DBC$ относятся как $\frac{\frac{1}{2} DB' \cdot DC' \cdot \sin BDC}{\frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin BDC} = \frac{DB' \cdot DC'}{DB \cdot DC}$.

Пусть теперь $A_1$ и $A_1'$ соответственно проекции точек $A$ и $A'$ на плоскость $DBC$. Тогда точки $D$, $A_1$ и $A_1'$ лежат на одной прямой. Из подобных треугольников $DAA_1$ и $DA'A_1'$ получаем пропорцию $\frac{A'A_1'}{AA_1} = \frac{DA'}{DA}$. Откуда следует, что объемы тетраэдров $DA'B'C'$ и $DABC$ относятся как $\frac{\frac{1}{3} S(DB'C') \cdot A'A_1'}{\frac{1}{3} S(DBC) \cdot AA_1} = \frac{DB' \cdot DC' \cdot DA'}{DB \cdot DC \cdot DA}$.

**53.** Пусть плоскость проходит через ребро $SC$ и точку $D$ — сере-

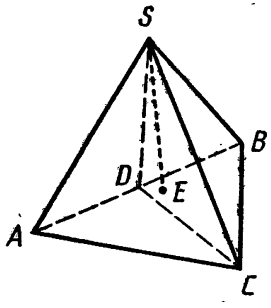



Рис. 152

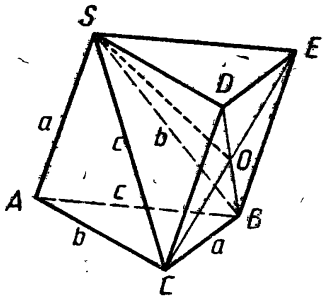



Рис. 153

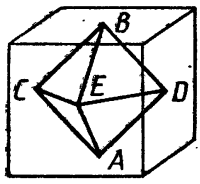



Рис. 154

дину ребра $AB$ (рис. 152). Следует показать, что объемы тетраэдров $SADC$ и $SDCB$ равны.

Имеем: $S(ADC) \cdot SE = S(BCD) \cdot SE$, так как площади треугольников $ADC$ и $BDC$ равны. Высоты тетраэдров, опущенные из точки $S$, тоже равны. Значит, объемы тетраэдров $SADC$ и $SBCD$ равны.

**54.** Объем призмы равен произведению площади трапеции $ABCD$ на высоту призмы $AA'$. Площадь трапеции $ABDC = \frac{h}{2}(AB + CD)$. Поэтому искомый объем равен

$$\frac{h}{2}(AA'(AB + CD)) = \frac{h}{2}(\text{пл. } ABA'B' + \text{пл. } CDC'D').$$

**55.** Дополним данный тетраэдр до призмы $SDEACB$ (рис. 153), добавив к нему четырехгранную пирамиду $SBCDE$. Ее основание $BCDE$ — ромб с боковой стороной $a$, поскольку $AS = CB = CD$. $SB = SD = b$, $SC = SE = c$, $SO \perp BCDE$.

Объем данного тетраэдра составляет $\frac{1}{3}$ объема всей призмы, т. е. $\frac{1}{2}$ объема пирамиды $SBCDE$, равного $S(BCDE) \cdot \frac{1}{3}SO$.

$$SO^2 = c^2 - CO^2, \quad SO^2 = b^2 - BO^2, \quad CO^2 + BO^2 = a^2.$$

$$S(BCDE) = 2 \cdot OB \cdot CO = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

**56.** Если в основании пирамиды лежит $n$-угольник, то число ребер, соединяющих вершину, проектируемую на основание, с вершинами, принадлежащими основанию, тоже равно $n$. Следовательно, число всех ребер $\text{Р} = 2n$. Число боковых граней равно $n$, к ним следует добавить основание. Итак, число граней пирамиды Г равно $n + 1$. Отсюда получаем, что в любой пирамиде число ребер и граней связано соотношением $\frac{\text{Р}}{2} + 1 = \text{Г}$, или $2\text{Г} - \text{Р} = 2$.

Если $\frac{\text{Р}}{2} = 12$ и $\text{Г} = 6$, то должно было быть $6 + 1 = 6$, что невозможно. Следовательно, пирамида не может иметь 12 ребер и 6 граней.

**57.** Получающийся в результате указанного в условии задачи построения многогранник $ABCDEG$ (вершина $G$ не видна) показан на рисунке 154. Покажем, что это октаэдр. В самом деле, рассматриваемый многогранник имеет восемь граней — число граней равно числу вершин куба, отсекаемых данными плоскостями. Покажем, что все грани представляют собой равные правильные треугольники.

Каждое из ребер многогранника $ABCDEG$ является средней линией треугольника, образованного тремя диагоналями граней куба, имеющих общую вершину. Поэтому все ребра многогранника равны между

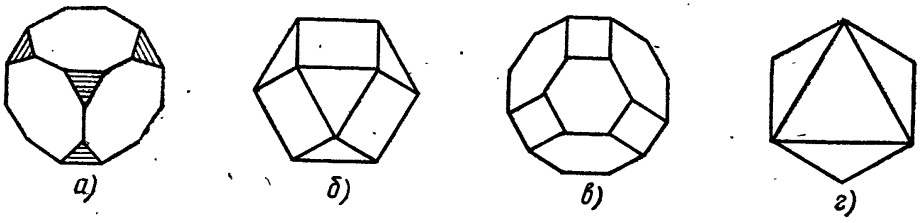



Рис. 155

собой, а каждая такая грань многогранника — равносторонний треугольник. Граней, которые бы содержали большее число ребер, у рассматриваемого многогранника нет.

Осталось еще показать, что в каждой вершине данного многогранника сходится четыре ребра. Но это следует из способа построения (см. рисунок к этой задаче).

58. Изображения полученных полуправильных многогранников приводятся на рисунке 155.

1) Каждое ребро данного куба длиной $a$ поделено на три равных отрезка, затем от всех восьми углов куба отсечено по тетраэдру с основанием, перпендикулярным диагонали куба, и боковыми ребрами, равными $\frac{a}{3}$ (рис. 155, *а*). В результате получился полуправильный многоугольник, грани которого — правильные треугольники и восьмиугольники.

2) Многогранник получился при отсечении от углов куба тетраэдров с боковыми ребрами, равными $\frac{a}{2}$ (рис. 155, *б*). Его грани — правильные треугольники и квадраты.

3) Многогранник получился при проведении плоскостей сечений через тройки точек ребер, отстоящих от вершин куба на расстояние $\frac{2a}{3}$ (рис. 155, *в*). Его грани — правильные шестиугольники и квадраты.

4) Сечения проведены перпендикулярно диагоналям куба через центры граней (рис. 155, *г*). Получился октаэдр.

59. Объем цилиндрического кольца, содержащего данную канавку, равен $y\left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi (d-2x)^2}{4}\right) = \pi y x (d - x)$.

Этот объем вдвое больше объема удаленной стружки (поскольку площадь сечения канавки равна половине площади сечения прямоугольника, вращением которого относительно оси детали получаем указанное цилиндрическое кольцо). Поэтому объем снятой стружки составляет $\frac{\pi x y (d-x)}{2}$.

60. Считаем, что нить охватывает пучки укропа по окружностям радиусов $R_1$ и $R_2$. По условию $2\pi R_2 = 4\pi R_1$, откуда $R_2 = 2R_1$ и площади «сечения» пучков укропа в местах, связанных нитями, равны соответственно $S_1 = \pi R_1^2$ и $S_2 = 4\pi R_1^2 = 4S_1$, таким образом, во втором

пучке укропа в 4 раза больше, чем в первом, и он должен стоить 80 к.

**61.** Если цистерна полностью заполнена жидкостью, то жидкость занимает объем $V = \frac{\pi d^2 l}{4}$, где $d$ — диаметр поперечника (рис. 156). Найдем значение $\sin\alpha$. Ясно, что $\frac{d}{2}\cos\alpha = \frac{d}{2} - h$, откуда

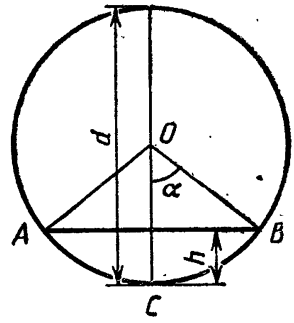


Рис. 156

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2h}{d},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(1-\frac{2h}{d}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{h}{d}}\cdot\sqrt{1-\frac{h}{d}}.$$

Найдем длину хорды $AB$: $AB = 2\left(\frac{d}{2}\sin\alpha\right) = 2\sqrt{h}\cdot\sqrt{d-h}$.

Определим площадь треугольника $AOB$. Она равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}-h\right)\cdot 2\sqrt{h}\sqrt{d-h} = \frac{(d-2h)\sqrt{h}\cdot\sqrt{d-h}}{2}.$$

Площадь сектора $AOB$ равна $\frac{d^2}{4}\arcsin\left(2\sqrt{\frac{h}{d}}\cdot\sqrt{1-\frac{h}{d}}\right)$.

Площадь сегмента $ACB$ составляет

$$\frac{d^2}{4}\arcsin\left(2\sqrt{\frac{h}{d}}\cdot\sqrt{1-\frac{h}{d}}\right) - \frac{(d-2h)\sqrt{h}\cdot\sqrt{d-h}}{2}.$$

Чтобы найти искомый объем, надо этот результат умножить на $l$ и подставить вместо $d$ его значение $\sqrt{\frac{4V}{l\pi}}$.

**62.** Пусть $R$ — радиус шара, тогда его объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, а площадь его поверхности равна $4\pi R^2$. По условию $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$, откуда $R = 3$ см. Таким образом, такой стальной шар вполне поместится на ладони ребенка и он сможет его поднять.

**63.** Пусть диаметр косточки равен $d$. Следовательно, объем косточки одной ягоды составляет $\frac{1}{6}\pi d^3$. Толщина мякоти — это разность между радиусами ягоды вишни и косточки. Пусть радиус ягоды вишни равен $r$. Тогда должно быть верным равенство $r - \frac{d}{2} = d$. Значит, радиус вишни равен $\frac{3}{2}d$ и объем ягоды вишни вместе с косточкой равен $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}d\right)^3 = \frac{9}{2}\pi d^3$. Объем, который составляет мякоть вишни, равен $\frac{9}{2}\pi d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{13}{3}\pi d^3$. Следовательно, объем мякоти

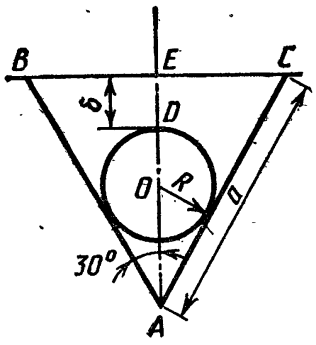



Рис. 157

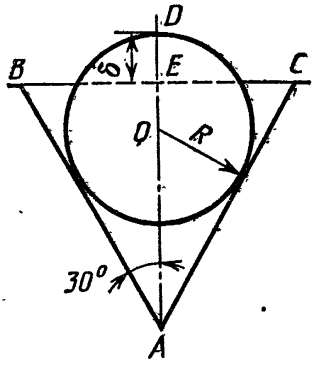



Рис. 158

каждой ягоды вишни превышает объем косточки в $\frac{13}{3} : \frac{1}{6} = 26$ раз. Мякоти получилось примерно 52 стакана.

**64.** Рассмотрим сначала случай, когда центр шара и точка $D$ находятся ниже плоскости $BC$ (рис. 157). Ясно, что длина отрезка $AE$ равна $a \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Длина отрезка $AD$ равна $AO + OD = \frac{R}{\sin 30°} + R = 3R$. Наконец, $\delta = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2} - 3R$.

Пусть теперь по-прежнему центр шара $O$ находится ниже плоскости $BC$, но точка $D$ — выше этой плоскости (рис. 158). Длина $AD$ равна $3R$, длина $AE$ равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $\delta = DE = 3R - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Точно так же убеждаемся, что и для случая, когда центр шара находится выше точки $E$, $\delta = 3R - \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

**65.** Проведем произвольную плоскость $\alpha$ через данную точку $A$ и центр шара $O$. В сечении получим круг, ограниченный окружностью $O_\alpha$ (рис. 159). Проведем произвольную секущую $CA$, которая пересечет окружность $O_\alpha$ в двух точках $C$ и $D$. Тогда точка $B$ — середина хорды $CD$ — принадлежит искомому множеству (поскольку угол $OBA$ для любой такой секущей прямой). Следовательно, условию задачи удовлетворяют точки, которые получаются при вращении дуги $TO$ вокруг оси $OA$.

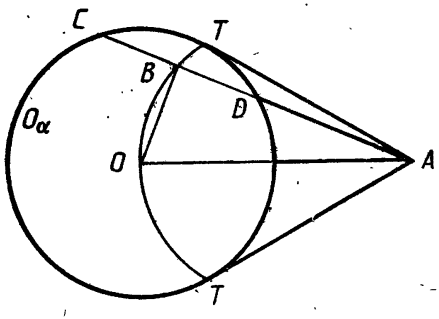



Рис. 159

**66.** Выберем произвольный тетраэдр. Проведем плоскость, касательную к любой сфере, параллельно одной из граней тетраэдра, затем другую касательную плоскость к той же сфере, параллель-

ную другой грани данного тетраэдра, и т. д. Пересекаясь, плоскости определят тетраэдр, подобный данному, и в него окажется вписанной сфера. Подвергнув его преобразованию подобия вместе с вписанной сферой, получим в результате тетраэдр, равный данному, причем в него вписана сфера, что и требовалось.

Ясно, что центр этой сферы должен лежать на пересечении плоскостей, которые делят пополам двугранные углы данного тетраэдра.

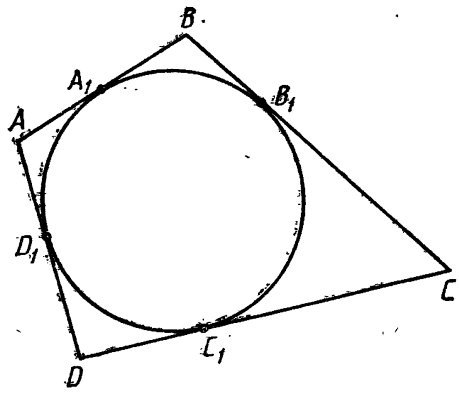


Рис. 160

**67.** Известно, что суммы длин противоположных сторон описанного около окружности произвольного выпуклого четырехугольника равны между собой. Так, если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то должно быть: $AB + CD = AD + BC$.

Напомним доказательство этого факта. Пусть $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ — точки касания сторон данного четырехугольника с окружностью (рис. 160). Тогда можем записать: $DD_1 = DC_1$, $CC_1 = CB_1$, $BB_1 = BA_1$, $AA_1 = AD_1$. Замечаем теперь, что $AA_1 + A_1B = AB = AD_1 + BB_1$, $DC_1 + C_1C = DC = DD_1 + CB_1$. Следовательно, $AB + CD = AD_1 + D_1D + BB_1 + B_1C = AD + BC$.

Заменим теперь окружность сферой, а плоский выпуклый четырехугольник пространственным четырехугольником $ABCD$ общего вида. В таком четырехугольнике пары сторон $AB$ и $DC$, $AD$ и $BC$ находятся на соответственно попарно скрещивающихся прямых. Если теперь соединить отрезками прямых вершины $B$ и $D$, $A$ и $C$ данного четырехугольника, то как раз получим тетраэдр, описанный около данной сферы так, что сферы касаются именно его ребра. Обратим теперь внимание на то, что отрезки касательных к сфере обладают совершенно таким же свойством, что и отрезки касательных к окружности. Поэтому рассуждение об окружности и плоском выпуклом четырехугольнике можно повторить, заменив всюду термин «окружность» термином «сфера», а термин «плоский выпуклый четырехугольник» термином «пространственный четырехугольник общего вида». В результате получаем требуемый результат.

**68.** Геометрическое место точек, из которых отрезок $AB$ виден под прямым углом, есть сфера, у которой $AB$ — диаметр. Аналогично геометрическим местом точек, из которых отрезок $AC$ виден под прямым углом, есть сфера с диаметром $AC$. Пусть у первой сферы центр находится в точке $O$, у второй — в точке $O'$. Пересечением этих сфер является окружность, из точек этой окружности оба отрезка видны под прямым углом. Необходимое и достаточное условие, чтобы эта окружность существовала, записывается так: $OO' < OA + OA'$. Плоскость этой окружности перпендикулярна оси $OO'$.

**69.** Ясно, что в любой однополостный конус (коническую поверх-

ность) можно поместить четыре шара (разных радиусов, конечно) так, чтобы они не имели общих точек. Такие четыре шара всегда можно найти.

Если теперь представить, что дан не один конус, а четыре конуса, одинаковых с данным и имеющих общую вершину, и в каждом из них помещено по одному из рассмотренных четырех шаров, то шары эти по-прежнему не будут пересекаться.

Рассмотрим теперь правильный тетраэдр с центром в источнике света. Опишем около его треугольных граней окружности, и пусть эти окружности служат направляющими четырех равных конусов с вершинами в центре тетраэдра. Увеличим на $\varepsilon$ раствор каждого из этих конусов и в каждый из них впишем по непрозрачному шару, которые не будут иметь общих точек. Эти шары загородят полностью точечный источник света, что и требовалось.

## IV. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. На следствии по делу о похищении автомобиля были допрошены четыре гангстера — Андре, Луи, Жорж и Том. Андре сказал, что машину похитил Луи. Луи утверждал, что виновник Том. Том заверил следователя, что Луи лжет. Жорж настаивал только на том, что автомобиль угнал не он. Следователю удалось установить, что только один из гангстеров сказал правду. Кто похитил автомобиль?

2. Футбольный кубок оспаривали четыре команды: «Пламя», «Рекорд», «Стрела» и «Трактор». Болельщики Александр, Борис и Виктор обсуждали шансы на победу каждой из команд. Александр сказал, что победу одержит либо «Пламя», либо «Рекорд». Борис был уверен, что «Пламя» не получит кубка. Виктор же считал, что кубок не выиграют ни «Рекорд», ни «Трактор». Только один из этих прогнозов подтвердился. Кто выиграл кубок?

3. В соревновании по бегу участвовали пять спортсменов. Виктору не удалось занять первое место. Григория обогнал не только Дмитрий, но и еще один спортсмен, отставший от Дмитрия. Андрей достиг финиша не первым, но и не последним. Борис финишировал сразу вслед за Виктором. Кто какое место занял в соревнованиях?

4. Учитель математики Николай Иванович, случайно встретив своего бывшего ученика Андрея, спросил, сколько же ему теперь лет. Получив ответ, он заметил, что сумма возрастов троих его соседей вдвое больше, тогда как произведение их возрастов равно 2450. Андрей, в прошлом победитель математических олимпиад, подумав, сказал, что пока не знает, сколько лет каждому из соседей Николая Ивановича; тогда учитель добавил, что двое из них близнецы. После этого Андрей с уверенностью назвал возрасты его соседей. Сколько лет соседям Николая Ивановича и Андрею?

5. На столе стоят три одинаковых ящика. В одном из них лежат два черных шарика, в другом — черный и белый, в третьем — два белых. На ящиках сделаны надписи: «Два белых», «Два черных», «Черный и белый», причем известно, что ни одна из них не соответствует действительности. Как, вынув только один шарик, определить правильное расположение надписей?

6. В одной коробке находятся два черных шарика, в другой — два белых, в третьей — один черный и один белый. На крышках коробок написано: «Черный, черный», «Белый, белый», «Белый, черный». Перекладывая шары из коробки в коробку, случайно перепутали крышки. Как определить содержимое коробок при условии, что за один раз из коробки можно достать, не заглядывая туда, только один шарик.

Смотреть, какой шарик в коробке остался, тоже нельзя. Сколько придется вынуть шариков, чтобы определить содержимое всех коробок?

**7.** На вечере головоломок Андрею, Борису и Виктору показали 4 синие и 4 красные марки, а затем всем им завязали глаза и наклеили каждому на шапочку по 2 марки. Сняв повязки, каждого из них спросили, знает ли он, какие марки у него на шапочке. Андрей, Борис и Виктор один за другим ответили «не знаю». Затем снова спросили то же самое у Андрея и опять получили отрицательный ответ. После этого Борис заявил, что теперь он знает, какие марки у него на шапочке. Какие марки наклеили Борису?

**8.** Один путешественник отправился на остров, населенный двумя племенами, о которых ему было известно, что в одном племени все высокие, а в другом — низенькие, что члены одного из племен всегда говорят правду, а члены другого племени всегда лгут и что те и другие знают английский язык. Высадившись на остров, путешественник встретил двух туземцев — высокого и низенького. Высокий на заданный ему по-английски вопрос путешественника: «Всегда ли вы говорите правду?» — ответил: «Карра-бум», а низенький сказал, что это значит «да». Какому племени принадлежал каждый из туземцев?

**9.** По окружности расставлены 15 красных и 15 синих фишек. Начиная с определенной фишки, отсчитываются подряд 9 фишек и девятая фишка снимается; затем отсчет идет от фишки, следующей за снятой, и снова девятая фишка снимается; так продолжается до тех пор, пока на окружности не останется 15 фишек. Как разместить на окружности фишки и с какой из них надо начинать отсчет, чтобы снятыми оказались все синие фишки?

**10.** У марсианина Тинка $m$ ног. Ему нужно выйти на улицу, а появляться на марсианских улицах в носках разного цвета почему-то считается непристойным. На беду все носки Тинка, а они $k$ цветов, по $m$ экземпляров каждого цвета, спрятаны в темной кладовой.

Сколько Тинку потребуется одновременно взять носков из кладовой, чтобы он наверняка на свету смог выбрать из них $m$ носков одного цвета?

**11.** Приводим отрывок из одного рассказа Джерома К. Джерома («Человек, который заботился обо всех»): «Впереди меня сидели две дамы. Кондуктор подошел к ним, чтобы получить деньги за проезд. Одна из них дала ему шестипенсовик, сказав, что едет до Пикадилли, куда билет стоит два пенса.

— Нет, нет, — сказала вторая дама своей приятельнице и дала кондуктору шиллинг. — Мы сделаем иначе. Я должна тебе шесть пенсов. Дай мне четыре, и я заплачу за нас обеих.

Кондуктор взял шиллинг, оторвал два билета по два пенса и задумался над сдачей.

— Ну вот, — сказала вторая дама, — теперь верните моей приятельнице четыре пенса.

Кондуктор послушался.

— А ты отдай эти четыре пенса мне, — обратилась она к первой даме. — Вот так. А теперь вы, — повернулась она к кондуктору, — дайте мне еще восемь пенсов, и тогда мы будем с вами в расчете.

Кондуктор нехотя отсчитал ей восемь пенсов: шестипенсовик, полученный им от первой дамы, и три монетки из своей сумки — пенни и два полупенса...

— А теперь, — сказала вторая, старшая дама младшей, — я должна тебе ровно шиллинг».

Принимая, что шиллинг равен 12 пенсам, а пенни — то же самое, что и пенс, определите, сколько и кто кому в действительности остался должен.

**12.** В повести В. Я. Шишкова «Странники» есть такое место:

«— А хочешь, я покажу тебе арифметический фокус-покус? Ахнешь.

— Ой! А ну, покажите, миленький.

Иван Петрович вырвал из блокнота страничку, подал мальчонке, спросил:

— Карандаш есть? Пиши любое пятизначное число.

Мальчонка написал. Иван Петрович мельком взглянул на это число, написал на отдельном клочке бумаги свое какое-то число, сунул бумажку в солому и прикрыл шляпой.

— Пиши под ним другое. Написал? Теперь я сам напишу третье. Теперь все три числа складывай. Только тщательней, не ври.

Через две минуты был готов проверенный ответ. Инженер Вошкин подал свои выкладки:

$$\begin{array}{r} 46\,853 \\ 21\,398 \\ 78\,601 \\ \hline 146\,852 \end{array}$$

— Сто сорок шесть тысяч восемьсот пятьдесят два, Иван Петрович.

— Долго считаешь. А у меня — вот он ответ. Я уж знал его, когда ты еще первое число написал. Вот. Тяни из-под шляпы.

Мальчонка выхватил бумажку. Там значилось: 146 852. Удивленное лицо инженера Вошкина вытянулось, и волосы на голове встопорщились. С боязнью, с удивлением он таращил глаза на Ивана Петровича.

— Ну... вот ... как же?.. А?..

Иван Петрович, улыбаясь и двигая бровями, дважды объяснил, сделал еще пример...»

Спрашивается, что объяснял Иван Петрович, «улыбаясь и двигая бровями»?

**13.** Имеются четыре чашки, поставленные в ряд донышками вниз. Требуется все их перевернуть донышками вверх, при этом переворачивать можно только по следующему правилу: одновременно переворачиваются ровно три чашки, причем чашка, стоящая донышком вниз,— в положение донышком вверх, а чашка, стоящая донышком вверх, — в положение донышком вниз. За сколько таких шагов можно четыре чашки, стоящие донышком вниз, перевернуть в положение донышками вверх?

**14.** Кузнец бьет молотом по наковальне четыре раза в течение 12 с.

Сколько ему потребуется времени, чтобы нанести по наковальне 8 ударов?

**15.** Часы $A$ отстают от часов $B$ на 2 с. Промежуток времени между двумя последовательными ударами у часов $A$ равен 3 с, а у часов $B$ — 4 с. Когда часы бьют одновременно, слышен только один звук. Определите, сколько времени на часах, если слышны 19 ударов.

**16.** Докажите справедливость признаков делимости натуральных чисел на 3 и 9. Выясните, будет ли справедливым утверждение: «Если число делится на 27, то сумма его цифр делится на 27.»

**17.** В магазине продаются белила, расфасованные в банках по 3 кг и 5 кг. Показать, что покупатель в этом магазине сможет купить любое, большее 7, число килограммов белил.

**18.** На отрезке $AB$ выбраны $2n$ точек, попарно симметричных относительно середины этого отрезка. Половина точек окрашена в красный цвет, половина — в синий. Доказать, что сумма расстояний от синих точек до точки $A$ равна сумме расстояний от красных точек до точки $B$.

**19.** Доказать, что 3, 5, 7 — единственная тройка последовательных нечетных чисел, каждое из которых простое.

**20.** Доказать, что для любого натурального числа $n$ удастся найти такое натуральное число $m$, что число $n \cdot m + 1$ окажется составным.

**21.** Как разделить 7 яблок поровну на 12 человек, не разрезая яблоки более чем на 4 части?

**22.** Даны два целых числа $m$ и $n$. Если их сложить, перемножить, разделить большее на меньшее, вычесть из большего меньшее, а затем все четыре полученных результата сложить, то получится 245. Найти эти числа.

**23.** Найти двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

**24.** Делится ли 81-значное число, все цифры которого — единицы, на число 81?

**25.** Найти наименьшее натуральное число, равное учетверенному произведению его цифр.

**26.** Найти два натуральных числа, разность которых равна их удвоенному частному.

**27.** Из трехзначного числа вычитается сумма его цифр. Затем из числа, которое представляет собой полученная разность, вычитается сумма его цифр и т. д. Показать, что после не более чем 100 таких вычитаний получается разность, равная 0.

**28.** В каком случае справедливо равенство $4 \cdot 13 = 100$?

**29.** Найти трехзначное число, которое в девятеричной системе счисления изображается теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке.

**30.** Рассмотрим частные от делений всевозможных двузначных натуральных чисел на суммы их цифр. Какое из частных окажется наибольшим?

**31.** Первая цифра некоторого шестизначного числа 1. Если эту единицу переставить в конец числа, оставив остальные цифры без из-

менения, то полученное число окажетея втрое больше исходного. Найти исходное число.

**32.** Последняя цифра в записи некоторого натурального числа 2. Если эту цифру переставить в начало, то получится число, вдвое большее первоначального. Найти исходное число.

**33.** Некоторое натуральное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру переставить в начало числа, оставив без изменения остальные цифры, то полученное число окажется втрое больше исходного. Найти исходное число.

**34.** Сколько делителей у числа: а) $3^6 \cdot 9^6$; б) $2^4 \cdot 3^5$; в) $2^n \cdot 3^m \times \times 5^k$?

**35.** Доказать, что если натуральное число $n$ больше 4 и является составным, то $(n-3)!$ делится без остатка на $n$.

**36.** Каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написана на отдельной карточке. Карточки раздают поровну трем мальчикам. Каждый мальчик из доставшихся ему цифр составляет наименьшее трехзначное число и записывает его. После первой раздачи оказалось, что у всех мальчиков сумма цифр записанных ими чисел одна и та же. После второй раздачи каждый мальчик получил по одной цифре, уже бывшей у него при первой раздаче, и опять сумма цифр у всех троих оказалась одинаковой. Когда затем каждый мальчик сложил записанные им числа, то сумма у всех оказалась одной и той же, равной 516. Какие цифры были на карточках у мальчиков при первой и второй раздачах?

**37.** Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10 г каждый. ОТК обнаружил, что одна из машин выпускает мячи массой всего в 5 г. Как найти испортившуюся машину с помощью взвешивания мячей? Взвешивать резиновые мячи разрешается только один раз.

**38.** Найти такие числа $a$ и $b$, что $a + b = ab = \frac{a}{b}$.

**39.** Выделить четырьмя взвешиваниями из 80 монет одну фальшивую (более легкую). Чашки весов вмещают любое число монет, не превышающее 50.

Сколько понадобится взвешиваний, чтобы выделить такую монету из 12 одинаковых на вид монет?

**40.** Выписана последовательность всех натуральных чисел от 1 до 1 000 000. Каких чисел в этой последовательности больше: содержащих хотя бы одну единицу или не содержащих ни одной единицы?

**41.** Можно ли записать по кругу девять чисел 1, 2, 3, ..., 9 так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

**42.** Установить с помощью семи взвешиваний последовательность масс пяти камней при условии, что в одном взвешивании могут участвовать только два камня.

**43.** Имеется $n$ баллонов со сжатым газом. Давление в $n$-м баллоне не меньше, чем в $(n-1)$-м, давление в $(n-1)$-м баллоне не меньше,

чем в $(n-2)$-м и т. д., т. е. $p_n \geqslant p_{n-1} \geqslant p_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant p_2 \geqslant p_1$. Если подсоединить два или несколько баллонов, то давление в подсоединенных баллонах выравнивается. Баллоны можно отсоединять и вновь подсоединять к любым другим баллонам, не подсоединявшимся ранее. Как получить в первом баллоне наибольшее возможное давление? Давление во всех других баллонах, возникающее в итоге такого его перераспределения, может быть произвольным.

**44.** Из некоторого пункта $A$ в пункт $B$ отправляется колонна из $n$ грузовиков, каждый из которых с запасом горючего на $T$ дней пути. Складов горючего по дороге нет. Каждый из грузовиков может по пути передавать любому другому грузовику или получать от него горючее. Как организовать движение грузовиков и передачу горючего, чтобы хотя бы один из грузовиков попал в пункт $B$, а каждый из остальных грузовиков смог вернуться в пункт отправления $A$, если расстояние между $A$ и $B$ соответствует $1{,}9T$ дней пути? Каким должно быть значение $n$, чтобы задача имела решение?

**45.** В международном шахматном турнире участвовали мастера и гроссмейстеры, всего $n$ человек. Мастера в играх между собой набрали столько же очков, сколько в играх с гроссмейстерами. Доказать, что число $\sqrt{n}$ целое.

**46.** Найти трехзначное число, кратное 9, в котором цифра десятков на 4 больше цифры единиц, а произведение трех чисел, выражаемых его цифрами, равно 0.

**47.** Что больше: $\sqrt{1969} + \sqrt{1971}$ или $2\sqrt{1970}$?

**48.** Пусть $a$, $b$ и $n$ — нечетные натуральные числа. Доказать, что разность $a^n - b^n$ делится без остатка на $2^n$ в том и только в том случае, если $a - b$ делится без остатка на $2^n$.

**49.** Почему крупную картошку чистить быстрее, чем мелкую?

**50.** Низкорослый пешеход делает три шага за то время, когда идущий рядом высокорослый делает два шага. Оба одновременно пошли с левой ноги. Наступит ли момент, когда они одновременно ступят на землю правыми ногами?

**51.** Николай, уходя из дома к приятелю Павлу, обнаружил, что забыл завести настенные часы и они стоят. Придя к Павлу, он заметил время своего прихода. Уходя от приятеля, Николай также заметил время и, возвратившись домой, правильно поставил свои часы. Как ему удалось это сделать? (Время, затраченное Николаем на дорогу к Павлу и обратно, одно и то же).

**52.** По горизонтальной дороге мотоциклист ехал со скоростью 60 км/ч. Но вот ему встретился подъем протяженностью 2 км, за которым следовал спуск протяженностью также 2 км. На подъеме мотоциклист ехал со скоростью 30 км/ч. С какой скоростью мотоциклист должен был ехать на спуске, чтобы средняя скорость на подъеме и на спуске составляла 60 км/ч?

**53.** Числа натурального ряда записаны в столбцы следующим образом:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 82 ... |
| | | | | | | | | 65 | 83 ... |
| | | | | | | | 50 | 66 | 84 ... |
| | | | | | | 37 | 51 | 67 | 85 ... |
| | | | | | 26 | 38 | 52 | 68 | 86 ... |
| | | | | 17 | 27 | 39 | 53 | 69 | 87 ... |
| | | | 10 | 18 | 28 | 40 | 54 | 70 | 88 ... |
| | | 5 | 11 | 19 | 29 | 41 | 55 | 71 | 89 ... |
| | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 | 90 ... |
| 1 | 3 | 7 | 13 | 21 | 31 | 43 | 57 | 73 | 91 ... |
| | 4 | 8 | 14 | 22 | 32 | 44 | 58 | 74 | 92 ... |
| | | 9 | 15 | 23 | 33 | 45 | 59 | 75 | 93 ... |
| | | | 16 | 24 | 34 | 46 | 60 | 76 | 94 ... |
| | | | | 25 | 35 | 47 | 61 | 77 | 95 ... |
| | | | | | 36 | 48 | 62 | 78 | 96 ... |
| | | | | | | 49 | 63 | 79 | 97 ... |
| | | | | | | | 64 | 80 | 98 ... |
| | | | | | | | | 81 | 99 ... |
| | | | | | | | | | 100 ... |

С какого числа начинается $n$-й столбец и каким заканчивается? Доказать, что произведение двух соседних чисел на «биссектрисе числового угла» равно числу, также лежащему на биссектрисе. «Биссектриса» этого угла на рисунке выделена.

**54.** Как устроен этот числовой «угол»?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | 6 | | | | | |
| 3 | 9 | 15 | | | | |
| 4 | 12 | 20 | 28 | | | |
| 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | | |
| 6 | 18 | 30 | 42 | 54 | 66 | |
| 7 | 21 | 35 | 49 | 63 | 77 | 91 |
| : | : | : | : | : | : | : |

Доказать, что сумма чисел, находящихся в $n$-й строке угла, равна $n^3$.

**55.** Это произошло далеко от населенных пунктов. Провианта у нас оставалось ровно на 10 дней. Питание разделили поровну на каждого и на каждый из 10 оставшихся дней маршрута.

И вот тогда нам неожиданно встретилась группа туристов, сбившихся с пути. У них провианта оставалось всего на 2 дня. Поделились мы с ними своими запасами, и тогда еды у нас и у них осталось по старым нашим меркам только на 4 дня — этого должно было хватить для возвращения на базу. Но сколько было туристов во встретившейся нам группе, как ни старался, вспомнить не мог. Может быть, мне не хватает каких-нибудь данных? Помогите разобраться?

**56.** Когда я бродил по Карпатам, то частенько мок под дождем. Пятнадцать дней, то утром, то вечером, небо заволакивали тучи, и полдня лил жесточайший ливень.

Но странную я подметил закономерность: каждый раз, когда дождило с утра, к полудню ветер обязательно разгонял тучи. Наступала чудесная погода. Как сейчас помню, шестнадцать раз было безоблачное утро. Не могу забыть и семнадцать тихих, ясных вечеров.

И вот теперь, когда я решил написать воспоминания о походе, то не могу сказать точно, сколько времени он длился. Помогите мне.

**57.** После схватки пиратов капитана Флинта с флибустьерами капитана Блада в судовом журнале капитана Флинта было записано: «Все пираты моей команды пострадали: 81% из них потеряли верхний зуб, 82% — нижний, у 83% был подбит правый глаз, у 84% — левый».

Как по этим данным установить, какой процент пиратов Флинта одновременно лишился двух зубов и оказался с двумя подбитыми глазами?

**58.** «Докажем», что $2 = 3$. $4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$, откуда $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства, получаем: $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$, т. е. $2 = 3$. Найдите ошибку.

**59.** «Докажем», что $2 > 3$. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$, откуда $2 \lg \frac{1}{2} > 3 \lg \frac{1}{2}$; разделив обе части неравенства на $\lg \frac{1}{2}$, получим $2 > 3$. Найдите ошибку.

**60.** От трамвайной станции одновременно с трамваем отъезжает велосипедист; в тот же момент к станции прибывает встречный трамвай. Велосипедист едет вдоль трамвайной линии. Через каждые 4 мин он встречается с трамваем, а через каждые 12 мин его догоняет трамвай. Определить, через какие промежутки времени трамваи отходят от станции (считая, что трамваи отходят через равные промежутки времени, движутся безостановочно, равномерно и с одинаковой скоростью и что велосипедист также движется равномерно).

**61.** Что собой представляет геометрическое место точек на плоскости, удовлетворяющих неравенству $\max(x, y) \leqslant 1$?

**62.** Что собой представляет геометрическое место точек на плоскости, удовлетворяющих неравенству $\min(x, y) \geqslant 1$?

**63.** Что собой представляет геометрическое место точек на плоскости, удовлетворяющих неравенству $\min^2(x, y) \geqslant 1$?

**64.** Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, используя каждую цифру ровно по одному разу, составить два натуральных числа так, чтобы их произведение было наибольшим.

**65.** Найти два натуральных числа, представляющих полный квадрат, если одно больше другого на 7.

**66.** В играх на кубок проигравшая команда выбывала из соревнований. Всего за кубок боролось $2n + 1$ команд. Сколько состоялось матчей в розыгрыше кубка?

**67.** В цехе 100 рабочих подали 100 рационализаторских предложений. Каждый из рационализаторов нашел собственный способ сэкономить электроэнергию на 1%. Техсовет цеха постановил внедрить

все эти предложения последовательно одно за другим. На сколько в результате будет меньше расходоваться электроэнергии?

**68.** Доказать, что $\sqrt{10}\,(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}$ — целое число.

**69.** В пустой ящик вкладывают $n$ пустых ящиков поменьше. Затем в один из пустых ящиков кладут $n$ пустых ящиков еще меньшего размера. Процедуру вкладывания продолжают снова и снова. Наполненным считается такой ящик, в который вложено хотя бы $n$ ящиков. Всего в конце оказалось наполненных $k$ ящиков. А сколько пустых?

**70.** Доказать, что если все грани параллелепипеда — равные параллелограммы, то все эти грани — ромбы.

**71.** В треугольнике известны длины двух сторон $a$ и $b$. Какой должна быть длина третьей стороны, чтобы наименьший угол этого треугольника достигал своего наибольшего значения?

**72.** В следующей шифровке каждая буква обозначает какую-то одну цифру и обратно: каждая цифра зашифрована одной какой-то буквой. Найти решение этой шифровки и показать, что оно единственное:

$$\begin{array}{r} \text{ФОКУС} \\ \text{ПОКУС} \\ \hline \text{ПРЕСТО} \end{array}$$

**73.** Решить кубическое уравнение

$$24y^3-26y^2-1=0.$$

**74.** Имеются два набора чисел

$$a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n$$

и

$$b_1>b_2>b_3>\ldots>b_n.$$

Доказать, что

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n>$$
$$>a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\ldots+a_nb_1.$$

**75.** Доказать, что для всякого натурального $n$ число $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ делится на 23.

**76.** Может ли произведение двух натуральных чисел, одно из которых оканчивается цифрой 2, а второе — цифрой 4, быть квадратом натурального числа?

**77.** Какими цифрами оканчиваются числа:

а) $666^{666}$; б) $444^{444}$; в) $333^{333}$?

**78.** Испытания показали, что шестипроцентная добавка в бензин метанола сокращает расход горючего при работе автомобильного двигателя до 15%. При каком количестве бензина удастся таким способом сэкономить 100 л бензина?

**79.** Три точки $A$, $B$ и $C$ занимают на плоскости положение, которое мы станем называть подходящим, если угол $ABC$ не меньше 120°. Чему равно наименьшее число произвольно выбранных на плоскости

точек, чтобы из них наверняка можно было выбрать тройку точек, занимающих подходящее положение?

**80.** Несколько команд разыграли первенство по волейболу, сыграв каждая с каждой по одному разу. Ничьих в волейболе не бывает. Доказать, что если какие-нибудь две команды одержали по одинаковому числу побед (не нулевому), то найдутся три такие команды $A$, $B$ и $C$, что команда $A$ выиграла у команды $B$, команда $B$ выиграла у команды $C$, а команда $C$ выиграла у команды $A$.

**81.** Решить в целых числах уравнение с тремя неизвестными

$$x - \frac{1}{y - \frac{1}{z}} = \frac{7}{9}.$$

**82.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5[x] + 2[y] = 19, \\ 3x + 4y = 21, \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа $x$, $[y]$ — целая часть числа $y$.

**83.** Показать что выражение $8n - 3$, где $n$ — натуральное число, не может быть квадратом никакого целого числа.

**84.** Выяснить, одинаковое ли число цифр или разное, у чисел $2^{100}$, $2^{101}$ и $2^{102}$.

**85.** Найти три последние цифры числа $7^{9999}$.

## РЕШЕНИЯ

**1.** Обозначим показания гангстеров через «Л», «Т», «не Т», «не Ж». Одно из двух утверждений «Т» и «не Т» истинно, а значит, утверждения «Л» и «не Ж» ложны. Отсюда следует, что автомобиль похитил Жорж.

**2.** Запишем кратко прогнозы болельщиков, переформулировав отрицательные суждения в равнозначной утвердительной форме, получим:

А — $П$ или $Р$,
Б — $Р$ или $С$ или $Т$,
В — $П$ или $С$.

Очевидно, что если бы кубок выиграла команда «Пламя», или «Рекорд», или «Стрела», то подтвердились бы прогнозы двух болельщиков, что противоречит условию задачи. Лишь в случае победы «Трактора» правилен только прогноз Бориса. Значит, кубок выиграл «Трактор».

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| А | — | + | | | — |
| Б | — | | | | + |
| В | — | | | + | |
| Г | — | — | + | — | — |
| Д | + | — | — | — | — |

**3.** Решить задачу поможет таблица, в которой записываются данные задачи и выводы из них с помощью знаков «+» и «—».

Из условия задачи следует, что никто, кроме Дмитрия, не занял I место, значит, I место занял Дмитрий. Отметим это с помощью значка «+» в строке Д. Раз I место занял Дмитрий, то Григорий занял III место; Виктор и Борис могут занять только IV и V места соответственно; следовательно, вторым прибежал Андрей.

4. Из всевозможных троек возрастов, произведение которых равно $2450 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2$, одинаковые суммы имеют только две: $49 + 10 + 5 = 64$ и $50 + 7 + 7 = 64$. Значит, Андрею 32 года, а соседям Николая Ивановича 50 лет, 7 лет и 7 лет.

5. Надо взять шарик из ящика с надписью: «Черный и белый». В нем не могут быть шарики разных цветов; значит, если вынут белый шарик, то в ящике — два белых шарика. Тогда из двух оставшихся ящиков с надписями: «Два белых» и «Два черных» — два черных шарика могут лежать только в первом, а значит, во втором лежат белый и черный шарики.

6. Достаточно вынуть четыре шарика. Сначала вынимаем из всех коробок по одному шарику. Шарики, вынутые из двух коробок, окажутся одинакового цвета, например черного, из третьей коробки — белого. Тогда в той коробке, откуда вынут белый шарик, оба шарика белые. Вынимая четвертый шарик из любой оставшейся коробки, узнаем содержимое этой и третьей коробок.

7. Первый ответ Андрея «не знаю» означает, что он не видит четырех марок одного цвета; то же самое означает отрицательный ответ Бориса. Ответ Виктора «не знаю» означает не только то, что он не видит четырех марок одного цвета, но и то, что он не видит одновременно на одной шапочке двух синих, а на другой — двух красных марок; видя это и учитывая ответы товарищей, он мог бы с определенностью сказать, что у него на шапочке марки разного цвета. Если бы на шапочке у Бориса были марки одинакового цвета, то Андрей, видя это и учитывая ответ Виктора, мог бы сделать вывод, что у него самого на шапочке марки разного цвета; следовательно, второй отрицательный ответ Андрея означает, что у Бориса на шапочке марки разного цвета, о чем тот и догадался по ответам товарищей.

8. Имеются две возможности: либо низенький принадлежит к племени лжецов, а высокий к племени правдивцев, либо наоборот. Допустим, что низенький принадлежит к племени лжецов. Это значило бы, что высокий ответил не «да», а «нет». Но для представителя племени правдивцев такой ответ невозможен. Следовательно, эта возможность отпадает. Проверим, реализуема ли в условиях задачи вторая возможность: низенький — правдивец, а высокий — лжец. Если низенький сказал правду, то высокий солгал, что соответствует принадлежности первого к племени правдивцев, а второго к племени лжецов. Итак, низенькие всегда говорят правду, а высокие всегда лгут.

9. Выпишем числа от одного до 30 и будем вычеркивать их по принципу, указанному в условии задачи. При этом будут последовательно вычеркнуты числа 9, 18, 27, 6, 16, 26, 7, 19, 30, 12, 24, 8, 22, 5, 23. Расположив их в порядке возрастания, получим ответ; за четырьмя красными фишками надо поместить 5 синих, затем 2 красные, 1 синюю, 3 красные, 1 синюю, 1 красную, 2 синие, 2 красные, 3 синие,

1 красную, 2 синие, 2 красные, 1 синюю фишки. Отсчет начинается с первой из четырех красных фишек.

**10.** Рассмотрим самый худший для Тинка случай. Пусть он выбрал $(m-1)\,k$ носков так, что оказалось по $m-1$ носков каждого цвета. Это наименее удачный случай потому, что вытянутых из кладовой носков еще недостаточно. Вот если бы носков какого-нибудь цвета оказалось меньше, чем $m-1$, то носков какого-то другого цвета оказалось бы $m$ или больше, т. е. больше носков вытягивать из кладовой не потребовалось бы. Ясно теперь, что если к имеющимся добавить один из носков, оставшихся в кладовой, любого цвета, то Тинк сможет из имеющихся носков выбрать не меньше, чем $m$ носков одного цвета. Значит, носков надо взять $(m-1)\,k+1$.

**11.** Составим следующую таблицу взаимных долгов и уплат:

| Кондуктор | Первая дама | Вторая дама |
|---|---|---|
| +6 | −6 | |
| +12 | | −12 |
| | −6 | +6 |
| | −4 | +4 |
| −4 | +2 | +2 |
| −4 | +4 | |
| | −4 | +4 |
| −8 | | +8 |
| | +12 | −12 |
| Итого: +2 | −2 | 0 |

Из таблицы следует, что вторая дама ошиблась, хотя и на немного. Кондуктор переполучил (за счет первой дамы) 2 пенса.

**12.** Иван Петрович совершенно произвольно написал шестизначное число с первой цифрой единицей (чтобы легче было считать), когда увидел записанное инженером Вошкиным число, то вычел его из своего, а на листке записал разность между первой разностью и вторым числом, записанным инженером Вошкиным.

**13.** Укажем способ перевертывания чашек, состоящий из четырех шагов. Первый шаг: перевернем три чашки из четырех данных в полжение донышком вверх. Второй шаг: перевернем ранее неперевернутую чашку и две перевернутые. В результате получим две чашки, стоящие донышками вверх, и две — донышками вниз. Третий шаг: перевернем две чашки, стоящие донышком вверх, и одну чашку, стоящую донышком вниз. В результате окажется одна чашка стоящей донышком вверх и три — донышком вниз. Четвертый шаг: перевернем три чашки, стоящие к этому моменту донышком вниз. В результате все четыре чашки будут перевернутыми донышками вверх, что и требовалось. Перебирая все другие возможные случаи, убеждаемся, что за меньшее число шагов выполнить требуемую операцию нельзя.

**14.** Удар кузнеца можно считать мгновенным. Первый удар кузнец производит в первое мгновение — первую секунду, а последний — четвертый — в последнюю, двенадцатую секунду. Поэтому за 24 с он успевает выполнить только 7 ударов. Промежуток времени между

двумя соседними ударами узнаем, поделив 12 с на 3 удара. Он равен 4 с. Поэтому на нанесение восьми ударов кузнецу потребуется 28 с.

**15.** Пусть $x$-й удар часов $A$ совпал с $y$-м ударом часов $B$; тогда до $x$-го удара часы $A$ били в продолжение $3(x-1)$ секунд, а часы $B$ до $y$-го удара — в продолжение $4(y-1)$ секунд. Так как часы $A$ отстают от часов $B$ на 2 с, то $4(y-1)-3(x-1)=2$, значит, $x$ равен 3, 7 или 11 и соответственно $y$ равен 3, 6 или 9. Между двумя последовательными совпавшими ударами часы $A$ бьют 3 раза, часы $B$ — 2 раза; значит, между двумя совпадениями звучат пять ударов. До первого совпадения прозвучали 4 удара. Так как всего ударов было 19, то совпавших ударов было 3. Складывая число ударов, которые могут быть услышаны до третьего совпадения включительно, получаем: $4+10+3=17$; значит, за то время, в течение которого были услышаны 19 ударов, в действительности было 22 удара, т. е. часы показывали 11.

**16.** Рассмотрим произвольное, например четырехзначное, число $a_1+10a_2+100a_3+1000a_4$. Его можно представить в виде $a_1+a_2+a_3+a_4+9(a_2+11a_3+111a_4)$. Ясно, что это число делится на 3 или 9 в том и только в том случае, если соответственно на 3 или 9 делится сумма $a_1+a_2+a_3+a_4$.

Однако для числа 27 сформулированное утверждение неверно. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести контрпример, который покажет, что сумма цифр числа может не делиться на 27, а само число делится без остатка на 27; таким числом является, например, 81.

**17.** Задачу можно сформулировать так: «Докажите, что любое натуральное число $N$, большее 7, можно представить в виде $3n+5m$, где $n$ и $m$ — натуральные числа».

Любое натуральное число можно представить в одном и только одном из трех видов $3k$, $3k+1$, $3k-1$, где $k$ — целое натуральное число.

Ясно, что если $N$ — число вида $3k$, т. е. число, кратное 3, то соответствующее количество белил ($N$ кг) можно купить в магазине, взяв банки только по 3 кг.

Наименьшее натуральное число, большее 7, равно 8. Это число вида $3k-1$. Восемь килограммов белил можно купить, взяв две банки: одну массой 3 кг, другую — массой 5 кг. Всякое большее число килограммов белил, выражающееся числом вида $3k-1$, можно купить, взяв дополнительно к этим двум банкам нужное число банок массой по 3 кг. Второе по величине натуральное число, большее 7 и не делящееся на 3, это 10. Это число вида $3k+1$. Оно может быть представлено в виде $5+5$. Любая масса краски, выражающаяся целым числом килограммов вида $3k+1$ и большим 7, может быть куплена в этом магазине в виде двух банок по 5 кг и некоторого числа банок по 3 кг.

**18.** Если расстояние от какой-либо красной точки до точки $B$ равно расстоянию от синей точки до $A$, то эту пару точек можно исключить из рассмотрения. Если до их удаления сумма расстояний от синих точек до точки $A$ равнялась сумме расстояний от красных

точек до $B$, то это равенство сумм расстояний сохранится и после удаления указанных двух точек.

Рассмотрим две симметричные точки, окрашенные в разные цвета (если такие точки найдутся). Тогда расстояние от красной точки до точки $B$ равно расстоянию от синей точки до $A$. Исключим все такие пары точек.

Если теперь и останутся какие-либо точки, то их число должно равняться $4m$, где $m$ — целое положительное число. Действительно, число пар синих точек должно быть равно числу пар красных.

Выберем пару симметричных точек, окрашенных в синий цвет, и пусть длина отрезка $AB$ равна $l$. Тогда, если расстояние одной из этих точек до конца $A$ равно $y$, то расстояние от другой до этого же конца равно $l - y$. Сумма этих двух расстояний равна $l$. Выберем теперь произвольно пару симметричных красных точек и убедимся, что сумма их расстояний до точки $B$ также равна $l$. Исключим и эти две пары точек из рассмотрения и т. д., пока все данные точки не окажутся исключены. В результате точек не останется и мы получим следующее равенство сумм расстояний: $0 = 0$. Восстанавливая теперь в обратном порядке все исключенные пары точек, на каждом этапе этого процесса получим, что сумма расстояний от синих точек до точки $A$ равна сумме расстояний от красных точек до точки $B$, что и требовалось.

**19.** Возьмем любую тройку последовательных нечетных чисел: $n$, $n + 2$ и $n + 4$. Пусть меньшее из них — простое и не равно 3, тогда оно не делится на 3, т. е. может быть представлено как $3k + 1$ либо как $3k + 2$. Но тогда либо $n + 2$, либо $n + 4$ делится на 3, т. е. не является простым.

**20.** Проще всего в качестве $m$ выбрать число $n + 2$. Тогда число $n \cdot m + 1$ выражает собой квадрат натурального числа $n + 1$.

**21.** Каждое из трех яблок надо разделить на 4 равные части, а каждое из остальных четырех — на 3 равные части. При дележе каждому достанется по четверти и по трети яблока.

**22.** Пусть $m > n$; $m + n + mn + m - n + \frac{m}{n} = 245$;

$$2m + mn + \frac{m}{n} = 245, \text{ откуда } \frac{m}{n} = p, \text{ где } p \text{ — целое;}$$

$$2mn + mn^2 + m = 245n;\ m(n+1)^2 = 245n;$$

$$(n+1)^2 = \frac{245n}{m} = \frac{245}{p} = \frac{5 \cdot 7^2}{p},$$

откуда $p = 5$, $n + 1 = 7$, $n = 6$, $m = 30$.

**23.** Из равенства $10x + y = 2xy$ следует, что $10x + y$ четно, т. е. $y$ четно. Разделив обе части равенства на $2x$, получим: $5 + \frac{y}{2x} = y$, откуда следует, что $y > 5$. Значит, $y = 6$ или $y = 8$. Если $y = 8$, то $5 + \frac{8}{2x} = 8$, откуда $x = \frac{4}{3}$, что невозможно; если $y = 6$, то $x = 3$. Искомое число: 36.

**24.** Данное число делится на 9 без остатка, так как сумма его цифр делится на 9. В частном получаем произведение числа 12345679 на 72-значное число вида: $1 + 10^9 + 10^{18} + 10^{27} + 10^{36} + 10^{45} + 10^{54} + 10^{63} + 10^{72}$. Сумма цифр этого числа равна 9. Поэтому оно делится на 9, а исходное число делится на $9 \times 9 = 81$.

**25.** Очевидно, что искомое число не может быть однозначным. Оно не может быть и двузначным, так как уравнение $10x + y = 4xy$ не имеет решений, удовлетворяющих условию задачи. В самом деле, $y$, очевидно, должен быть четным, т. е. равным 2, 4, 6 или 8; при этом $x$ равен соответственно $-1, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}$.

Пусть искомое число равно $100x + 10y + z$; тогда $100x + 10y + z = 4xyz$ и $x = \frac{10y + z}{4(yz - 25)}$. Очевидно, что $z$ — четное число и, так как $yz > 25$, $z > 2$. Следовательно, $z$ равно 4, 6 или 8. Пусть $z = 4$, тогда $x = \frac{5y + 2}{2(4y - 25)}$, откуда видно, что $y$ четно; так как $4y > 25$, а значит, $y > 6$, то $y = 8$; при этом $x = 3$.

Пусть $z = 6$, тогда $x = \frac{5y + 3}{2(6y - 25)}$, откуда следует, что $y$ нечетно. Так как $6y > 25$, т. е. $y > 4$, то $y$ равен 5, 7 или 9. Значения $x$, соответствующие этим значениям $y$, дробные. Значит, при $z = 6$ решения нет. Убедитесь таким же образом, что при $z = 8$ также нет решения.

Искомое число: 384.

**26.** Пусть $x$ и $y$ — искомые числа, причем $x > y$. Возможны два случая: 1) $x - y = \frac{2x}{y}$, 2) $x - y = \frac{2y}{x}$.

Рассмотрим первый случай. Очевидно, что $y \neq 1$ и $y \neq 2$; значит, $x$ делится на $y$. Положим, что $x = ny$, где $n$ — целое число, тогда $ny - y = \frac{2ny}{y}$, откуда $y = \frac{2n}{n - 1}$. Так как $n$ и $n - 1$ — взаимно простые числа, то 2 должно делиться на $n - 1$, т. е. $n - 1 = 1$ или $n - 1 = 2$, откуда $n = 2$ или $n = 3$, следовательно, $y = 4$ или $y = 3$ и соответственно $x = 8$ или $x = 9$.

Рассмотрим второй случай. Так как $x > y$, 2 должно делиться на $x$, т. е. $x = 1$ или $x = 2$; $x \neq 1$, так как при $x = 1$ значение $y$ дробное; при $x = 2$ значение $y$ равно 1. Значит, искомыми числами являются 8 и 4, 9 и 3, 2 и 1.

**27.** Если из любого числа первого десятка (1—9) вычесть сумму его цифр, то получится разность, равная нулю. Если из любого числа второго десятка (10—19) вычесть сумму его цифр, то разность равна 9 и т. д. Если из любого числа десятого десятка (91—99) вычесть сумму его цифр, то разность равна 81. В пределах первой сотни разность между числом и суммой его цифр принимает одно из следующих десяти значений, кратных 9: 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Замечаем еще, что если отнять от любого числа этого ряда (кроме нуля) сумму его цифр, то получим ближайшее меньшее число в том же ряду. Например, если из числа 81 вычесть сумму его цифр, то получим ближайшее

меньшее число 72, если из числа 72 вычесть сумму его цифр, то получим 63 и т. д. Таким образом, последовательно вычитая из числа в пределах первой сотни сумму его цифр, затем из разности — сумму ее цифр и т. д., нуль получаем максимум за девять вычитаний.

Полученный результат носит вспомогательный характер, так как нам надлежит по условию задачи рассматривать не двузначные, а трехзначные числа. Но и здесь наблюдаем ту же картину. В пределах второй сотни (100—199) разность между произвольным числом и суммой его цифр может принимать одно из следующих значений: 99, 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180. При этом если мы хотим найти разность числа, входящего в эту десятку, и суммы его цифр, то достаточно перейти к ближайшему слева числу в том же ряду. Например, если из числа 162 вычитается сумма его цифр, то получаем ближайшее слева число того же разряда — 153. При переходе к третьей сотне вновь получаем последовательность из десяти чисел, кратных 9, обладающих теми же свойствами, что и предыдущие. Поскольку таких сотен в рассматриваемых пределах десять, то общее число членов рассматриваемых последовательностей равно 100 (вместе с первым числом — нулем).

Обратим теперь внимание на то, как последовательности, характеризующие соседние сотни, связаны между собой. Рассмотрим последнее число предыдущей последовательности и первое число последующей. Например, если выбраны первая и вторая сотни, то последним числом первой последовательности будет 81, а первым числом второй последовательности — число 99, если взяты вторая и третья сотни, то такими числами будут 180 и 198. Видим, что вычитание суммы цифр из первого числа последующей последовательности приводит к последнему числу предыдущей. Таким образом, из десятков чисел образуем последовательность, состоящую из 100 целых неотрицательных чисел, кратных 9, обладающих названными выше общими свойствами.

Если рассматриваемое трехзначное число заключено между 990 и 999, то получение нуля в качестве разности между числом и суммой его цифр происходит при сотом вычитании. В других случаях число требуемых последовательных вычитаний меньше.

**28.** В шестеричной системе счисления: $4 \cdot (6 + 3) = 6^2$.

**29.** Пусть искомое число есть $100x + 10y + z$, тогда $100x + 10y + z = 81z + 9y + x$, откуда $100x + y = 80z + x$. Так как первые слагаемые сумм в левой и правой частях равенства — числа, оканчивающиеся нулем, то $x = y$. Следовательно, $z = \frac{5}{4}x$, откуда $x = 4$, $z = 5$, а искомое число: 445.

**30.** Пусть $x$ — число десятков, а $y$ — число единиц, тогда число запишется так: $10x + y$. Рассмотрим:

$$\frac{10x + y}{x + y} = \frac{9x}{x + y} + 1 = \frac{9}{1 + \frac{y}{x}} + 1.$$

Это число оказывается наибольшим тогда, когда $\frac{y}{x}$ принимает

наименьшее возможное значение. Следовательно, при $y = 0$, $x$ может принимать любое значение.

**31.** Если через $a$ обозначить число, составленное пятью последними цифрами исходного числа $x$, то будем иметь: $x = 100\,000 + a$. Если в числе $x$ переставить цифру 1 из начала в конец, то в полученном числе $y$ $a$ будет показывать число его десятков, т. е. $y = 10a + 1$. По условию $10a + 1 = 3\,(100\,000 + a)$, откуда $7a = 299\,999$, $a = \frac{299\,999}{7} = 42\,857$. Искомое число $x$ равно 142 857. Нетрудно убедиться, что $428\,571 = 3 \cdot 142\,857$.

**32.** Обозначим искомое число через $x$; тогда число, полученное в результате указанной в условии перестановки, будет $2x$. Числа $x$ и $2x$ имеют одинаковое число знаков (положим, $n$) и число $2x$ начинается с цифры 2; значит, число $x$ начинается с цифры 1. Каждая $m$-я ($m < n$) от конца цифра в записи числа $2x$ совпадает с $(m + 1)$-й от конца цифрой в записи числа $x$. Число $x$ оканчивается цифрой 2; значит, число $2x$ оканчивается цифрой 4, т. е. 4 — вторая от конца цифра числа $x$. Отсюда получаем, что вторая от конца цифра числа $2x$ — 8; она же — третья от конца цифра числа $x$. Далее, удваивая число 8, получаем цифру 6 — третью от конца в записи числа $2x$ и четвертую от конца в записи числа $x$. Удваивая число 6 и добавляя единицу, появившуюся при переходе через десяток при удвоении числа 8, получаем цифру 3 — четвертую от конца в записи числа $2x$ и пятую от конца в записи числа $x$. Переходя и далее подобным образом от найденной $m$-й от конца цифры числа $x$ к $m$-й от конца цифре числа $2x$, а от нее — к $(m + 1)$-й цифре числа $x$, будем последовательно получать цифры записи искомого числа. Процесс продолжается до тех пор, пока мы не получим в записи числа $x$ цифру 1 и на соответствующем месте записи числа $2x$ цифру 2 — первые цифры этих чисел. Очевидно, что описанный процесс периодический. Продолжая его далее, мы через столько же шагов получим новое число, удовлетворяющее условию задачи, и т. д. Вычисления удобно организовать с помощью таблицы:

| | |
|---|---|
| 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 | $x$ |
| 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 | $2x$ |

Искомое число 105 263 157 894 736 842, а также любое натуральное число, запись которого состоит из таких последовательностей цифр.

**33.** Искомое число равно 1 034 482 758 620 689 655 172 413 793, а также все натуральные числа, записи которых состоят из таких последовательностей цифр (см. решение предыдущей задачи).

**34.** а) 19; делители вида $3^n$, где $0 \leqslant n \leqslant 18$; б) 30; делители вида $2^m 3^n$, где $0 \leqslant m \leqslant 4$, $0 \leqslant n \leqslant 5$; в) $(n + 1)\,(m + 1)\,(k + 1)$.

**35.** Поскольку $n$ — составное число, то можно записать, что $n = m \cdot k$, где $m$ и $k$ — натуральные числа, не меньшие двух. Покажем, что ни одно из них не превосходит $n - 3$. Действительно, предположим противное. Пусть $m > n - 3$, $k \geqslant 2$. Тогда $n = mk > 2\,(n - 3)$ и $n > 2n - 6$, т. е. $n < 6$. Но $n$ — число составное и

не может быть равно 5. Пришли к противоречию. Значит, ни при одном возможном значении $n$ не может выполняться неравенство $m > n - 3$. Итак, $2 \leqslant m \leqslant n - 3$ и $2 \leqslant k < n - 3$.

Рассмотрим вначале более простой случай, когда $m \neq k$. Поскольку $m$ и $k$ — числа, меньшие $n - 3$, то оба они встречаются среди множителей левой части равенства $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 3) = (n - 3)!$, значит, $(n - 3)!$ делится на $n = m \cdot k$, что и требовалось.

Перейдем к более сложному случаю, когда $m = k$ и $n = m^2$. Наименьшее возможное значение $n = 9$, и поэтому $m \geqslant 3$. Значит, $n = m^2 \geqslant 3m = 2m + m \geqslant 2m + 3$, откуда $2m \leqslant n - 3$. Получаем, что два разных числа $m$ и $2m$ являются множителями в левой части равенства $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 3)!$ Поскольку $(n - 3)!$ делится без остатка на произведение чисел $m$ и $2m$, то оно делится без остатка и на $m^2$. Следовательно, и в этом случае $(n - 3)!$ делится без остатка на число $n$.

**36.** Сумма всех записанных на карточках цифр равна 45; значит, сумма цифр каждого из чисел, записанных мальчиками, равна 15. Такими числами, в запись которых входит 1, могут быть только 159 и 168; с цифрой 2 — 249и 267; с цифрой 3 — 348 и 357; с цифрой 4 — 456. Число 456 не могло быть записано мальчиком, так как $516 - 456 = 60$. Числа, начинающиеся с цифр 5, 6, 7, не могли быть составлены мальчиками, так как сумма цифр в их записи была бы больше 15. Значит, при одной раздаче были составлены числа 159, 267, 348, при другой — соответственно 357, 249 и 168.

**37.** Возьмем от первой машины один мяч, от второй — два, от третьей — три ... от десятой — десять. Найдем их общую массу. Это взвешивание будет единственным. Если бы все мячи были массой по 10 г, то весы показали бы $10 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 10 \times \frac{10(10+1)}{2} = 550$ г. Если первая машина выпускает брак, то общая масса всех взятых мячей окажется на 5 г меньше. Если вторая, то на 10 г ... если 10-я, то на 50 г. Нужно только запомнить, сколько мячей брали от каждой машины.

**38.** $ab = \frac{a}{b}$ тогда и только тогда, когда либо $a = 0$, $b \neq 0$, либо $b = 1$, либо $b = -1$. Если $b \neq 0$, то и $a \neq 0$, иначе получаем: $a + b \neq 0$, а $\frac{a}{b} = 0$; $b \neq 1$, так как $a + 1 \neq a \cdot 1$. При $b = -1$, $a - 1 = -a$, откуда $2a = 1$, $a = \frac{1}{2}$. Следовательно, $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$.

**39.** Заменим данное условие задачи таким, которое на первый взгляд более сложно, а на деле позволяет лучше разобраться в рассматриваемой ситуации. Выделим четырьмя взвешиваниями фальшивую монету не из 80, а из $81 = 3^4$. Точно так же мы поступили бы, если данное число монет $p$ принимало любое значение в пределах $3^4 > p > 2 \cdot 3^3 = 54$. Разделим все монеты на три кучки по $27 = 3^3$ в каждой (если число монет меньше 81, то в первые две кучки определим по 27 монет, а в третью — все оставшиеся). Первую кучку монет положим на одну чашку весов, вторую — на другую. Если чашки урав-

новесятся, то монета — в третьей кучке. Если первая кучка оказалась тяжелей, то более легкая монета — во второй, если тяжелее вторая, то монета эта — в первой. Таким образом, наша задача сводится к отысканию более легкой монеты среди одинаковых на вид $27 = 3^3$ монет (или меньшего из числа). Если в кучке, содержащей более легкую монету, ровно 27 монет, то вновь разбиваем монеты на три кучки по $9 = 3^2$ монет в каждой, вторым взвешиванием находим из них более легкую кучку, третьим взвешиванием отыскиваем наиболее легкую тройку монет и, наконец, четвертым — искомую легкую монету.

Если число монет в двух кучках по 27, а в третьей меньше 27, но больше $18 = 2 \cdot 3^2$ (как в нашем случае, здесь третья кучка содержит 26 монет) и после первого взвешивания эта третья кучка оказывается наиболее легкой, то разбиваем далее ее на три группы, в первых двух по 9 монет, в третьей меньше и т. д.

Покажем, наконец, что при определении легкой монеты из 12 достаточно трех взвешиваний. Все монеты разделим на 4 кучки по 3 монеты в каждой. Из этих четырех кучек двумя взвешиваниями (двумя — в худшем случае, может оказаться достаточным одного) выделим наиболее легкую. Из трех монет одну, наиболее легкую можно определить с помощью одного взвешивания.

Если бы в условии задачи не было оговорено, что фальшивая монета более легкая, а известно бы было только, что она отличается от стандартных по массе, то определение того, является ли она более легкой или более тяжелой, можно провести при еще одном, дополнительном взвешивании, например когда нестандартная по массе монета останется среди трех проверяемых.

**40.** Число 1 000 000 пока исключим из рассмотрения. Тогда все оставшиеся числа не больше чем шестизначные. Все их можно считать «шестизначными», если на месте отсутствующих разрядов слева записать нули. Например, число 9999 записать 009 999. Сколько всего существует таких чисел? Наивысший разряд такого числа может быть обозначен любой из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Каждая из этих цифр, обозначающих старший разряд числа, может стоять рядом с любой цифрой во втором по старшинству разряде и т. д. Следовательно, получаем $10^6$ всевозможных «шестизначных» чисел.

В скольких из этих чисел не встречается ни одной единицы? Исключим в каждом разряде из рассмотрения 1 и получим $9^6$ таких чисел. Следовательно, количество «шестизначных» чисел, содержащих хотя бы одну единицу, равно $10^6 - 9^6 + 1$. Больше это число или меньше, чем количество чисел, не содержащих единицу, ($9^6$)? Покажем, что меньше. Нетрудно подсчитать, что $9^6 = 521\,441$. Ясно, что $10^6 - 521\,441 + 1 < 521\,441$.

Итак, количество чисел, данных в условии задачи и содержащих хотя бы в одном разряде единицу, меньше количества чисел, единицы не содержащих.

**41.** Можно. Соседними с 1 могут быть только числа 3 и 7 (в этом убеждаемся перебором). Другим соседним с числом 7 может быть одно из чисел 4, 6, 9. Выбираем 4 и видим, что вторым соседним числом 4

может быть только число 9. В качестве соседнего числа для 9 не могут быть использованы числа 1 и 7, потому что они уже использовались ранее. Продолжая рассуждение дальше, получаем такое расположение чисел: 3 — 1 — 7 — 4 — 9 — 2 — 6 — 5 — 8 — 3.

**42.** Сравним сначала массы любых двух камней. Более легкий обозначим 1, более тяжелый 2. Тот факт, что 1 легче, обозначим так: $1 < 2$. Вторым взвешиванием сравним массы двух других камней. Более легкий обозначим 3, более тяжелый 4. Оставшийся камень обозначим 5. Третьим взвешиванием сравним массы камней 2 и 4. Допустим, что получилось $2 < 4$. Тогда имеем: $1 < 2 < 4$, $3 < 4$. Назовем это ситуацией (1). Вернемся к третьему взвешиванию. Могло получиться, что $2 > 4$. В этом случае перенумеруем камни 1 и 2 соответственно в 3 и 4, а камни 3 и 4 соответственно в 1 и 2. В результате вновь получим ситуацию (1).

Четвертым взвешиванием сравним массы камней 2 и 5. Рассмотрим сначала сравнительно простую ситуацию (2): $2 < 5$; $1 < 2 < 4$ и $3 < 4$.

Пятым взвешиванием сравним массы камней 4 и 5. Если $4 < 5$, то получаем ситуацию (3): $1 < 2 < 4 < 5$ и $3 < 4$. Ясно, что двух взвешиваний (сначала 3 с 2, а затем, если потребуется, с 1) достаточно, чтобы определить место 3 в последовательности.

Если же $5 < 4$, то получается ситуация (4): $1 < 2 < 5 < 4$ и $3 < 4$.

Шестым взвешиванием сравниваем массы 2 и 3, а затем седьмым взвешиванием сравниваем либо 1 и 3 (если $3 < 2$), либо 3 и 5. В итоге получаем, что во всех до сих пор рассмотренных случаях оказывалось достаточно семи взвешиваний.

Вернемся теперь к ситуации (2) и заменим ее следующей ситуацией (2′):

$$5 < 2,\ 1 < 2 < 4 \text{ и } 3 < 4.$$

Напомним, что в этой ситуации выполнены четыре взвешивания. Пятым взвешиванием сравним массы камней 1 и 5. В результате получаем либо следующую ситуацию (3′):

$$5 < 1 < 2 < 4 \text{ и } 3 < 4,$$

либо ситуацию (4′):

$$1 < 5 < 2 < 4 \text{ и } 3 < 4.$$

В ситуации (3′) шестым взвешиванием сравниваем 3 с 1, затем седьмым взвешиванием 3 с 5 или с 2. В ситуации (4′) шестым взвешиванием сравниваем 3 с 5, затем седьмым 3 с 1 или 2. Тем самым рассмотрены все возможные случаи, возникающие при взвешивании и в каждом случае оказалось достаточно провести семь взвешиваний, что и требовалось.

**43.** Проведем требуемые рассуждения вначале для случая, когда баллонов только 3, а давление в них $p_3 \geqslant p_2 \geqslant p_1$.

В этом случае возможны следующие четыре способа последовательного подсоединения баллонов:

1) Подсоединяем одновременно друг к другу сразу три баллона,

после чего отсоединяем первый. Тогда в нем давление окажется равным $\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$.

2) Подсоединяем вначале два баллона с давлениями соответственно $p_2$ и $p_3$, затем их отсоединяем и любой из них подсоединяем к баллону с давлением $p_1$. В результате давление в первом баллоне оказывается равным $\frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{1}{2}(p_2 + p_3)\right) = \frac{1}{4}(2p_1 + p_2 + p_3)$.

3) Подсоединяем вначале баллоны с давлениями $p_1$ и $p_2$, затем отсоединяем их и первый подсоединяем к баллону с давлением $p_3$. В результате давление в первом баллоне окажется равным

$$\frac{1}{2}\left(p_3 + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)\right) = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + 2p_3).$$

4) Подсоединяем вначале баллоны с давлениями $p_1$ и $p_3$, затем их отсоединяем. Вслед за тем первый подсоединяем с баллоном с давлением $p_2$. В результате этих процедур давление в первом баллоне оказывается равным $\frac{1}{2}\left(p_2 + \frac{1}{2}(p_3 + p_1)\right) = \frac{1}{4}(p_1 + 2p_2 + p_3)$.

Так как по условию $p_3 \geqslant p_2 \geqslant p_1$, то

$$\frac{1}{4}(p_1 + p_2 + 2p_3) \geqslant \frac{1}{4}(p_1 + 2p_2 + p_3) \geqslant \frac{1}{4}(2p_1 + p_2 + p_3).$$

Таким образом, давление в первом баллоне при попарных подсоединениях оказывается наивысшим в третьем из рассмотренных случаев, т. е. когда баллоны подсоединяются в порядке возрастания в них давления, а именно первый со вторым, затем второй с третьим.

Наконец, сравним это давление с давлением, которое получается при одновременном подсоединении трех баллонов:

$$\frac{1}{4}(p_1 + p_2 + 2p_3) - \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = \frac{2p_3 - p_1 - p_2}{12} \geqslant 0.$$

Видим, что первое давление выше.

Из рассмотренного следует, что при $n \geqslant 3$ при попарном подсоединении получается наибольшее давление в первом баллоне, если баллоны подсоединяются в порядке возрастания в них давления: первый ко второму, затем после отсоединения первый к третьему, затем после отсоединения первый к четвертому и т. д.

Остается пока неясным, не окажется ли в первом баллоне давление выше при одновременном подсоединении четырех, пяти и т. д. баллонов.

В результате попарного способа подсоединений в первом баллоне в итоге давление оказывается равным

$$\frac{1}{2}\left(p_k + \frac{1}{2}\left(p_{k-1} + \ldots + \frac{1}{2}\left(p_3 + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\right)\ldots\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{k-1}}(p_1 + p_2 + 2p_3 + \ldots + 2^{k-3}p_{k-1} + 2^{k-2}p_k).$$

В результате же одновременного подсоединения оно оказывается равным

$$\frac{1}{k}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1} + p_k).$$

Выясняя, в каком из двух случаев давление больше, вычтем из первого второе. После приведения двух дробей к общему знаменателю получим в числителе выражение $(p_1 + p_2 + 2p_3 + 2^2p_4 + \ldots + 2^{k-2}p_k)\,k - 2^{k-1}(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$. Если оно неотрицательно, то первый способ подсоединения, т. е. попарных подсоединений, дает желаемый результат.

Покажем, что в рассмотренном только что выражении число положительных слагаемых равно числу отрицательных слагаемых. В самом деле, число положительных слагаемых равно $(1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-2})\,k = (1 + 2^{k-1} - 1)\,k = k \cdot 2^{k-1}$. Число отрицательных слагаемых подсчитать еще легче — внутри пары скобок $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$ их $k$ и это число умножается на коэффициент при скобках $2^{k-1}$. Итак, числа положительных и отрицательных слагаемых равны. Теперь остается только заметить, что в вычитаемом одинаковое число и больших и малых слагаемых, скажем, $p_1$ берется $2^{k-1}$ раз и столько же раз берется число $p_k \geqslant p_1$. В уменьшаемом, напротив, меньших чисел меньше, а бóльших — больше. Поэтому рассматриваемая разность неотрицательна, что и требовалось показать.

Итак, во всех случаях последовательное подсоединение баллонов в порядке возрастания в них давления позволяет достичь наибольшего давления в первом баллоне.

**44.** В общей сложности $n$ грузовиков могут истратить горючего не больше, чем запасенного на $Tn$ дней. Пусть все машины на первом этапе пути проедут в глубь пустыни от пункта $A$ расстояние, соответствующее $\frac{T}{n+1}$ дням пути. После этого пусть одна из машин передаст каждой из $n - 1$ остальных машин горючее, соответствующее $\frac{T}{n+1}$ дням пути, т. е. всего на $\frac{n-1}{n+1}T$ дней пути. Тогда у этой машины останется горючего на $\frac{1}{n+1}T$ дней пути, которого достаточно для немедленного возвращения ее в пункт $A$. Остальные $n - 1$ грузовиков продолжают свой путь в направлении к пункту $B$ еще на расстояние, соответствующее $\frac{T}{n+1}$ дням пути. Затем второй грузовик передает каждому из $n - 2$ грузовиков горючее, соответствующее $\frac{T}{n+1}$ дням пути, и немедленно отправляется назад в пункт $A$. Во втором грузовике останется горючего на $T - \frac{n-1}{n+1}T = \frac{2T}{n+1}$ дней пути, которого ему хватит для возвращения. К этому моменту колонной грузовиков будет пройден путь, соответствующий $\frac{2T}{n+1}$ дням пути.

Оставшиеся машины колонны продолжают свой путь к пункту $B$ и передача горючего происходит по той же схеме. Когда настанет время отправлять назад к пункту $A$ $k$-й грузовик $(2 < k \leqslant n-1)$, колонна пройдет расстояние, соответствующее $\frac{k}{n+1}T$ дням пути, и $k$-й грузовик передаст каждому из $n-k$ продолжающих путь грузовиков горючее на $\frac{T}{n+1}$ дней пути. На последнем участке пути он израсходовал горючего на $\frac{T}{n+1}$ дней. В результате ему останется горючего на $T - \frac{T}{n+1} - \frac{n-k}{n+1}T = \frac{k}{n+1}T$ дней, что достаточно для его возвращения к пункту отправления. Остальные $n-k$ грузовиков продолжают путь, имея каждый на $T$ дней горючего.

В частности, если $k = n-1$, то один из двух грузовиков, которые двигались в направлении пункта $B$, отдает горючее на $\frac{T}{n+1}$ дней другому, у которого в результате оказывается горючего еще на $T$ дней пути, а сам возвращается. У него горючего останется на $\frac{n}{n+1}T - \frac{T}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}T$ дней, чего вполне хватит для его возвращения. Итак, последний грузовик может проехать расстояние, соответствующее $T + \frac{n-1}{n+1}T$ дням пути. Это расстояние по условию задачи должно быть не меньше $1{,}9T$.

Следовательно, $\frac{n-1}{n+1} \geqslant 0{,}9$; $n-1 \geqslant 0{,}9n + 0{,}9$; $0{,}1n \geqslant 1{,}9$; откуда $n \geqslant 19$.

**45.** Пусть $x$ — число участвовавших в турнире мастеров, $y$ — число гроссмейстеров. Тогда $x + y = n$. Каждый из мастеров сыграл с другими мастерами $x-1$ партий. Поэтому между мастерами было сыграно $\frac{1}{2}x(x-1)$ партий. Коэффициент $\frac{1}{2}$ появляется потому, что в каждой встрече участвовало два человека. Точно так же гроссмейстеры между собой сыграли $\frac{1}{2}y(y-1)$ партий. Число партий между гроссмейстерами, с одной стороны, и мастерами — с другой, равно $x \cdot y$. Следовательно, оказывается справедливым соотношение $\frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}y(y-1) = xy$, которое сводится к следующему равенству $n = x + y = (x-y)^2$, откуда следует, что $\sqrt{n}$ является целым числом, что и требовалось.

**46.** Среди цифр искомого числа есть 0, который не может быть ни цифрой сотен, ни цифрой десятков, а следовательно, является цифрой единиц, т. е. вторая и третья цифры искомого числа соответственно 4 и 0. Поскольку число кратно 9, то первая его цифра 5. Искомое число 540.

**47.** Возведем в квадрат сумму и преобразуем результат: $1969 + 1971 + 2\sqrt{1969 \cdot 1971} = 1970 + 1970 + 2\sqrt{(1970-1)(1970+1)} = 1970 + 1970 + 2\sqrt{1970^2 - 1^2} < 4 \cdot 1970$. Следовательно, $\sqrt{1969} + \sqrt{1971} < 2\sqrt{1970}$.

**48.** Справедлива формула

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (*)$$

Убедимся прежде всего в том, что вторая пара скобок содержит нечетное число слагаемых. Действительно, первое слагаемое $a^{n-1}$ содержит $b$ в нулевой степени, второе слагаемое содержит $b$ в первой степени и т. д., последнее слагаемое содержит $b$ в $(n-1)$-й степени. Следовательно, число слагаемых равно $n$ — числу нечетному. Каждое из этих слагаемых нечетно, а сумма нечетного числа нечетных слагаемых — число нечетное.

Вернемся к формуле (*). Докажем утверждение, высказанное в условии задачи, сначала в одну сторону, затем в обратную. Ясно, что если разность $a - b$ делится на $2^n$, то на $2^n$ делится и $a^n - b^n$. Если на $2^n$ делится $a^n - b^n$, то и $a - b$ делится на $2^n$, поскольку множитель $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$ — нечетное число.

**49.** Потому, что объем, а значит и масса картофелины пропорциональны кубу ее радиуса, а поверхность — квадрату радиуса (считая картофелины шарообразными).

**50.** Обозначим время, за которое низкий делает 3 шага, а высокий 2 шага, через $t$. Тогда будем иметь следующие последовательности шагов:

| | $t$ секунд | | | $t$ секунд | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Высокий | 0 | Л | П | Л | | П |
| Низкий | 0 | Л | П Л | П | Л | П |
| | $t$ секунд | | | $t$ секунд | | |

Как видно, через $2t$ секунд оба пешехода ступят на землю одновременно правой ногой.

**51.** Уходя из дома, Николай завел свои часы и, возвратившись, смог по своим часам определить, сколько времени он пробыл вне дома. Обозначим это время через $a$, а время пребывания Николая у Павла через $b$. Располагая этими данными, легко найти время $x$, затраченное Николаем на дорогу от дома Павла домой: $b + 2x = a$, откуда $x = \frac{a-b}{2}$. Прибавив время, затраченное на дорогу домой, к времени ухода из дома Павла, Николай узнал время своего возвращения домой.

**52.** Достичь требуемого невозможно. Следуя со средней скоростью 60 км/ч, мотоциклист проезжает за минуту 1 км, а за 4 мин — 4 км. При скорости 30 км/ч он проезжает подъем протяженностью 2 км за 4 мин. Поэтому на спуск со средней скоростью 60 км/ч ему не остается времени.

**53.** Высота первого столбца 1, второго 3, третьего 5, ..., $n$-го

$2n-1$. Таким образом, нижнее число $n$-го столбца равно $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$. Верхнее число $n$-го столбца поэтому выражается числом $(n-1)^2+1$. Число на «биссектрисе угла» в $n$-м столбце равно $(n-1)^2+1+n-1=n^2-2n+1+1+n-1=n^2-n+1$. В качестве соседнего числа возьмем число на «биссектрисе» в $(n+1)$-м столбце. Оно равно $(n+1)^2-(n+1)+1=n^2+n+1$. Произведение этих двух соседних чисел оказывается равным $(n^2+1)^2-n^2=n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-(n^2+1)+1$. Итак, перемножая числа, размещенные в $n$-м и $(n+1)$-м столбцах на «биссектрисе» угла, получаем число, также принадлежащее биссектрисе, но расположенное в $(n^2+1)$-м столбце.

**54.** Этот числовой «угол» устроен следующим образом. Первый столбец слева — последовательность чисел натурального ряда, начиная с 1. Удобно считать, что все числа, находящиеся в первом столбце, умножены на первое нечетное число, т. е. на 1. Во втором столбце помещаются последовательно числа натурального ряда, начиная с 2, умноженные все на второе нечетное число, т. е. на 3 и т. д., в $n$-м столбце помещаются числа натурального ряда, начиная с $n$, полученные умножением на $n$-е нечетное число, т. е. на $2n-1$.

Поэтому искомую сумму чисел, находящихся в $n$-й строке, можно записать так:

$$1\cdot n+3\cdot n+5\cdot n+\ldots+(2n-1)\,n=n\,(1+3+5+\ldots$$
$$\ldots+(2n-1))=n\,(1+2+3+4+5+\ldots+(2n-1)+2n-$$
$$-2\,(1+2+3+\ldots+n))=n\left(\frac{2n\,(2n+1)}{2}-n\,(n+1)\right)=$$
$$=n^2\,(2n+1-n-1)=n^3.$$

**55.** Пусть в нашей группе насчитывалось $n_1$ туристов. Во встретившейся нам группе было $n_2$ туристов. Тогда наш запас провианта составлял вначале $10n_1$ порций, их запас $2n_2$ порций. После того как провиант поделили, то и у них, и у нас осталось по 4 порции на человека, т. е. $\frac{10n_1+2n_2}{n_1+n_2}=4$ и $n_2=3n_1$.

Следовательно, во встретившейся нам группе насчитывалось втрое больше туристов, чем в нашей. Если вспомнить, сколько туристов было в нашей группе, то легко установить и число туристов в другой группе.

**56.** Предположим, что в течение $x$ дней было ясное утро и дождливый вечер, в течение $y$ дней — дождливое утро и ясный вечер и $z$ дней — ясное утро и ясный вечер. Тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} x+y=15, \\ x+z=16, \\ y+z=17. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения и деля на 2 обе части, получаем:

$$x+y+z=24.$$

Итак, поход длился 24 дня.

**57.** Подсчитаем, сколько процентов пиратов не лишилось верхнего зуба: 100% — 81% = 19%; нижнего зуба не лишилось 100% — — 82% = 18%, правый глаз не был подбит у 100% — 83% = 17%, левый — у 100% — 84% = 16%. Всего эти пираты составили 19% + + 18% + 17% + 16% = 70% от общего числа пиратов. Следовательно, выбили сразу два зуба и одновременно подбили два глаза 100% — 70% = 30% от числа всех пиратов Флинта.

**58.** Извлекая квадратный корень из $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2$, получаем $\frac{5}{2}-2$, так как $2-\frac{5}{2}<0$.

**59.** $\lg\frac{1}{2}<0$; при делении обеих частей неравенства на отрицательное число получается неравенство противоположного смысла. Поэтому на последнем шаге получаем не $2>3$, а $2<3$.

**60.** Пусть $v_1$ — скорость трамвая, $v_2$ — скорость велосипедиста, $a$ — расстояние между двумя трамваями, едущими в одном направлении; тогда $4v_1+4v_2=a$ и $12v_1-12v_2=a$, откуда $\frac{v_1}{v_2}=2$, т. е. велосипедист движется вдвое медленнее трамвая. Время, за которое трамвай проходит путь $a$, равно $\frac{a}{v_1}$; разделив обе части одного из уравнений на $v_1$ и решив полученное уравнение относительно $\frac{a}{v_1}$, получим: $\frac{a}{v_1}=6$, значит, искомое время равно 6 мин.

**61.** Эта фигура — прямой угол (вместе с внутренними точками), вершина которого находится в точке (1; 1), а стороны параллельны и противоположно направлены осям координат.

**62.** Эта фигура — прямой угол (вместе с внутренними точками), вершина которого находится в точке с координатами (1; 1), а стороны параллельны осям координат и одинаково с ними направлены.

**63.** Эта фигура — объединение двух прямых углов с внутренними точками. Один из этих углов получен в решении предыдущей задачи. Другой симметричен ему относительно начала координат.

**64.** Для того чтобы из десяти цифр составить два натуральных числа, произведение которых будет наибольшим, надо выяснить:

а) в какой последовательности записывать цифры в числе, если набор цифр для числа определен;

б) по какому принципу разделить все цифры на две группы для записи чисел;

в) по сколько цифр отбирать для каждого числа.

Отвечаем на эти вопросы поочередно.

а) Цифры в записи числа следует располагать в порядке убывания слева направо, например, если в одну группу были отобраны цифры 0, 1, 2, 3, 4, а в другую —5, 6, 7, 8, 9, то множители, образующие наибольшее произведение, получатся соответственно такие: 43 210 и 98 765.

б) Станем поочередно находить цифры в разрядах сомножителей, определяющих наибольшее произведение, начиная с наивысших разрядов сомножителей. Для этого в начале определим, какое из произведений $9\times87$ или $8\times97$ больше. Больше оказывается $9\times87=783$ ($8\times97=776$). Значит, в наивысшем разряде первого множителя стоит цифра 9, а в двух высших разрядах второго множителя цифры 8 и 7. Определим теперь, какому из двух сомножителей принадлежит цифра 6. Для этого сравним два произведения:

$$9\times876=7884 \text{ и } 96\times87=8352.$$

Второе произведение больше, значит цифра 6 записывается во втором по старшинству разряде первого множителя. Далее последовательно сравниваем следующие произведения и устанавливаем значение искомых сомножителей и произведений: $96\times875=$ $=84\,000$ и $965\times87=83\,955$; $964\times875=843\,550$ и $96\times8754=840\,384$; $9643\times875=8\,437\,625$ и $964\times8753=8\,438\,392$; $9642\times8753=84\,396\,426$ и $964\times87\,532=8\,437\,892$; $96\,421\times8\,753=843\,973\,013$ и $87\,531\times$ $\times9\,642=843\,973\,902$. Наконец, нуль может быть приписан справа к любому из множителей 87 531 или 9 642.

В результате получаем наибольшее возможное произведение 8 439 739 020.

в) Ответ на этот вопрос следует из ответа на предыдущий.

**65.** Если из квадрата числа $n+1$ вычесть квадрат соседнего меньшего числа, то получим: $(n+1)^2-n^2=2n+1$, где $n$ — натуральное число. Число 7 должно быть представлено в виде $7=2n+1$, тогда $n=3$. Искомые числа: 9 и 16.

Если из квадрата числа $n+2$ вычесть квадрат числа, меньшего $n+2$ на 2, то получим: $(n+2)^2-n^2=4n+4$. Число 7 не представимо в таком виде. Число 7 не представимо также в виде $(n+3)^2-$ $-n^2$ и т. д.

Таким образом, полученный ответ единственный.

**66.** В каждом матче выбывала одна команда. Выбыло $2n$ команд. Следовательно, состоялось $2n$ матчей.

**67.** Пусть вначале расходуется в день $x$ единиц электроэнергии. После внедрения первого рацпредложения расходоваться будет $x-\frac{x}{100}$ единиц, после внедрения второго $\left(x-\frac{x}{100}\right)-$ $-\frac{x}{100}\left(x-\frac{x}{100}\right)=x\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)-\frac{1}{100}\left(1-\frac{1}{100}\right)\right)=x\left(1-\frac{1}{100}\right)^2$ единиц электроэнергии. Точно также же получаем, что после внедрения третьего рацпредложения расходоваться будет электроэнергии $w=$ $=x\left(1-\frac{1}{100}\right)^3$ единиц и т. д., после внедрения сотого рацпредложения $w=x\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}=x\cdot(0{,}99)^{100}$. С помощью микрокалькулятора или воспользовавшись четырехзначными математическими таб-

лицами можно найти $\frac{w}{x}$. Например, $\lg \frac{w}{x} = 100\,(\lg 99 - 2) = \overline{1},56$. Значит, $w = x \cdot 0{,}363$. Общий расход электроэнергии уменьшится на 0,637.

**68.** Рассмотрим сотую степень числа $1 + \sqrt{10}$. Представим ее как произведение 100 множителей: $\underbrace{(1+\sqrt{10})\,(1+\sqrt{10}) \cdot \ldots \cdot (1+\sqrt{10})}_{100 \text{ множителей}}$. Это произведение можно представить как сумму всевозможных степеней $\sqrt{10}$ от нулевой до сотой, причем у каждой степени будет свой коэффициент: $a_0\,(\sqrt{10})^0 + a_1\,(\sqrt{10})^1 + a_2\,(\sqrt{10})^2 + \ldots + a_{99}\,(\sqrt{10})^{99} + a_{100}\,(\sqrt{10})^{100}$. Все коэффициенты $a_0$, $a_1$, ..., $a_{100}$ — целые числа. Укажем способ их нахождения. $a_0 = 1$ — есть результат перемножения единиц из 100 пар скобок. Коэффициент $a_1$ может быть получен так: из первой пары скобок берем $\sqrt{10}$, из остальных скобок в качестве множителя берем 1, затем из второй пары скобок берем $\sqrt{10}$, из остальных 1 и т. д., наконец, из последней, сотой пары скобок берем $\sqrt{10}$, из остальных 1. Количество таких слагаемых и представляет собой коэффициент $a_1$ при $(\sqrt{10})^1$. Точно по такому же принципу находим коэффициент при $(\sqrt{10})^2$: из любых двух пар скобок берем по множителю $\sqrt{10}$, из остальных 98 двучленов в качестве множителя берем по 1; находим общее количество таких произведений. Это и будет коэффициент $a_2$. Продолжая этот процесс дальше, найдем $a_{100}$ и в итоге получаем записанную выше сумму, которую обычно называют разложением степени двучлена по степеням, в данном случае $\sqrt{10}$.

Аналогичным образом отыскиваем коэффициенты разложения $(1 - \sqrt{10})^{100}$ и показываем, что на этот раз они равны соответственно $a_0, -a_1, a_2, -a_3, \ldots, -a_{99}, a_{100}$. Выполняя требуемое в условии задачи вычитание, получаем:

$$2\sqrt{10}\,(a_1\sqrt{10} + a_3\,(\sqrt{10})^3 + a_5\,(\sqrt{10})^5 + \ldots + a_{99}\,(\sqrt{10})^{99}) = 20\,(a_1 + 10a_3 + 100a_5 + \ldots + 10^{49} \cdot a_{99}),$$ т. е. целое число.

**69.** Вначале был один пустой ящик. После каждого вкладывания число пустых ящиков убывает на 1 (за счет того ящика, в который вложена новая порция ящиков) и возрастает на $n$. Таким образом, число пустых ящиков после каждого вкладывания увеличивается на $n - 1$. Число наполненных ящиков равно числу вкладываний ящиков $k$.

Поэтому число пустых ящиков после $k$ вкладываний равно $1 + k\,(n - 1)$.

**70.** Рассмотрим два смежных ребра $AB$ и $BC$ произвольной грани $ABCD$ данного параллелепипеда, все грани которого равные параллелограммы, и докажем, что эти ребра равны.

Предположим противное. Пусть ребра $AB$ и $BC$ не равны. Но эти ребра являются сторонами двух равных параллелограммов $ABXY$ и $CBXZ$, представляющих собой грани данного параллелепипеда, для

которых ребро $BX$ общее. Поскольку $AB$ и $BC$ — соответственные стороны равных параллелограммов, то они равны между собой, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, грань $ABCD$ — ромб, а так как эту грань выбрали произвольно, то и все грани параллелепипеда — ромбы.

**71.** Примем для определенности, что $a < b$.

Начнем рассуждения со случая $a \leqslant \frac{b}{2}$. Ему соответствуют всевозможные треугольники $ABC$ с двумя данными сторонами $AC = b$ и $BC = a$. При этом наименьшим углом в треугольнике будет угол $A$, расположенный против наименьшей стороны. Наибольшее из всех возможных значений угол $A$ принимает, когда вершина $B$ треугольника $ABC$ находится в точке касания луча, проведенного из точки $A$, с окружностью радиуса $a$ и с центром в точке $C$.

Обратимся теперь к случаю, когда $\frac{b}{2} < a < b$. Если провести окружность радиуса $a$ с центром в точке $C$ и к ней касательную из точки $A$ и точка $B$ окажется точкой касания, то на этот раз ни один из острых углов $A$ и $C$ не принимает наибольшего значения. Оно оказывается достигнутым одновременно для углов $A$ и $C$ тогда, когда $a = c$. Это и есть наибольшее значение наименьшего угла для второго рассматриваемого случая. Дальнейшее увеличение угла $C$ вызовет соответствующее уменьшение угла $A$. Последний станет минимальным, но не будет принимать значения, наибольшего для минимального.

**72.** Прежде всего ясно, что буквой П зашифрована цифра 1, потому что, складывая два числа, меньшие 10, в разряде десятков больше единицы получить нельзя.

Так как обозначение единицы теперь известно — оно единственно, то Р не может обозначать 1, и, следовательно, Р обозначает цифру 0 (нуль).

Буква Ф может обозначать цифру 8 или цифру 9. Проверим сначала цифру 8. Тогда буква О обозначает обязательно четное однозначное число, такое, которое при удвоении дает единицу в следующем разряде. Таким числом может быть только 6. Следовательно, Е обозначает 2, а С обозначает 3. Тогда для К нельзя подобрать никакой цифры. Значит, буквой Ф может быть зашифрована только цифра 9.

Буква О должна обозначать одну из четных цифр: 2, 4, 6 или 8. Но 6 и 8 сразу исключим из рассмотрения, потому что в противном случае буква Р не сможет обозначать 0.

Если буква О обозначает цифру 4, то буква Е обозначает цифру 8, буква С — цифру 2 или 7. Если С обозначает цифру 2, то У может обозначать только 3 и для К нельзя подобрать никакой цифры.

Если С = 7, то Т может обозначать только 3, —6, но тогда для К нельзя подобрать цифры.

Итак, буква О может обозначать только цифру 2. Тогда получаем, что буква С обозначает цифру 6, буква К — цифру 8, буква Е — цифру 5, буква У — цифру 3, буква Т — цифру 7.

В результате получаем единственное возможное решение:

$$\begin{array}{r} 92836 \\ 12836 \\ \hline 105672 \end{array}$$

**73.** Данное уравнение целых корней не имеет. В самом деле, непосредственной подстановкой выясняем, что числа $+1$, $-1$ и 0 не являются его корнями. При других значениях $y$, являющихся целыми числами, $24y^3$ заметно больше по модулю, чем $26y^2 - 9y + 1$.

Естественно предположить, что корень данного уравнения выражается правильной дробью, и, проведя замену переменной $y = \frac{1}{x}$, попытаться найти целые значения корней нового уравнения $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Видим, что $x = 2$ является корнем полученного кубического уравнения. Разделив левую его часть на $x - 2$, получаем квадратное уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$, корнями которого являются целые числа 3 и 4.

Следовательно, корни исходного уравнения: $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{3}$, $y_3 = \frac{1}{4}$.

**74.** Перенесем все слагаемые в левую сторону неравенства и сгруппируем их сначала так, чтобы у соседних произведений можно было вынести за скобку общий множитель $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда одно из соседних произведений будет записываться со знаком «плюс», второе — со знаком «минус». В итоге левая часть будет выглядеть так:

$$a_1(b_1 - b_n) + a_2(b_2 - b_{n-1}) + a_3(b_3 - b_{n-2}) + \\ + \ldots + a_n(b_n - b_1).$$

Если $n$ — нечетное число, то одним из слагаемых является $a_{\frac{n+1}{2}}(b_{\frac{n+1}{2}} - b_{\frac{n+1}{2}}) = 0$. Поэтому оказывается, что и при четном и при нечетном значениях $n$ число не равных нулю слагаемых в рассматриваемой сумме четно. Воспользуемся этим и вновь сгруппируем слагаемые полученной суммы попарно: первое с последним, второе с предпоследним и т. д. Затем соседние пары слагаемых представим в виде произведений. В результате для четного $n = 2k$ получаем:

$$(a_1 - a_{2k})(b_1 - b_{2k}) + (a_2 - a_{2k-1})(b_2 - b_{2k-1}) + \ldots \\ \ldots + (a_k - a_{k+1})(b_k - b_{k+1}),$$

для нечетного $n = 2$ находим:

$$(a_1 - a_{2k-1})(b_1 - b_{2k-1}) + (a_2 - a_{2k-1})(b_2 - b_{2k-2}) + \\ + \ldots + (a_{k-1} - a_{k+1})(b_{k-1} - b_{k+1}).$$

Оба эти выражения имеют положительные значения, потому что положительна каждая из разностей, содержащихся внутри пар скобок. Значит, первоначальное неравенство справедливо.

**75.** Числа $2^{n+4}$, $2^{n+1}$ и $5^{2n+1}$ можно записать соответственно так: $16 \cdot 2^n$, $2 \cdot 2^n$, $5 \cdot 25^n$. Поэтому мы вправе исходное выражение преобразовать к виду

$$5 \cdot (23+2)^n + 18 \cdot 2^n = 5\,(23+2)^n + 23 \cdot 2^n - 5 \cdot 2^n = \\ = 23 \cdot N + 23 \cdot 2^n - 5 \cdot 2^n = 23 \cdot N + 23 \cdot 2^n,$$

где $N$ — некоторое натуральное число.

Из последнего равенства и следует требуемое.

**76.** Нет, не может. Данное произведение оканчивается цифрой 8. Между тем квадраты натуральных чисел могут оканчиваться только следующими цифрами: 1, 4, 9, 6, 5.

**77.** а) Ясно, что число $6^{666}$ оканчивается на ту же цифру, что и число $666^{666}$. Но любая степень числа 6 оканчивается цифрой 6. Поэтому и данная степень оканчивается цифрой 6.

б) Число $444^{444}$ оканчивается той же цифрой, что и $4^{444}$. Замечаем, что число 4 в четной степени оканчивается цифрой 6, число 4 в нечетной степени оканчивается цифрой 4. В нашем случае показатель степени 444 — число четное. Поэтому интересующее нас число оканчивается на 6.

в) Число $333^{333}$ оканчивается той же цифрой, что и число $3^{333}$. Число 3 в степени, которая выражается числом вида $4k+1$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, оканчивается цифрой 3, в степени вида $4k+2$ оканчивается цифрой 9, в степени вида $4k+3$ оканчивается цифрой 7, наконец, в степени вида $4k$ — цифрой 1.

Число 333 при делении на 4 дает в остатке 1. Следовательно, оно вида $4k+1$, и интересующее нас число оканчивается цифрой 3.

**78.** При шестипроцентной добавке метанола в каждых 100 л смеси содержится 6 л метанола и 94 л бензина, следовательно, экономится 6 л бензина. Но из 94 л бензина удастся сэкономить дополнительно $\frac{15 \cdot 94}{100} = 14$ л. Следовательно, на каждые 100 л бензина удастся сэкономить 20 л; 100 л бензина можно сэкономить примерно из 500 л.

**79.** Нетрудно привести примеры, которые показывают, что трех, четырех и пяти точек может оказаться недостаточно, чтобы выполнялось условие задачи. Например, эти точки могут оказаться в вершинах соответственно правильных треугольника, четырехугольника или пятиугольника. Во всех этих случаях подходящей тройки точек не найдется.

Заметим также, что если точки $A$, $B$ и $C$ находятся на одной прямой и точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, то угол $ABC$ развернутый и больше 120°. Поэтому тройка точек $A$, $B$ и $C$ занимает подходящее положение.

Докажем теперь, что шести точек на плоскости достаточно, для того чтобы в любом случае из них можно было выбрать три так, чтобы они занимали подходящее положение.

Рассмотрим сначала случай, в котором данные 6 точек оказываются вершинами выпуклого шестиугольника. Тогда сумма всех шести углов этого многоугольника равна 720°, и средняя величина угла равна $720° : 6 = 120°$. Поэтому среди углов найдется хотя бы один, величина которого не меньше 120° (если бы средняя величина угла была меньше 120°, то их сумма, очевидно, была бы меньше 720°). Тем самым нашлась подходящая тройка точек, что и требовалось.

Предположим теперь (этот случай исчерпывает все остальные имеющиеся возможности), что хотя бы одна из шести точек оказалась внутри треугольника, вершины которого — три из пяти оставшихся точек. Соединим эту внутреннюю точку отрезками прямых с вершинами треугольника. При этом образуются три угла, сумма которых равна 360°. Поэтому среднее значение угла не меньше 120°, и из получившейся тройки углов найдется один, удовлетворяющий условию задачи.

**80.** Пусть две команды, например $A$ и $B$, набрали по одинаковому числу очков $m$, отличному от нуля. Примем для определенности, что команда $A$ выиграла у команды $B$. Исключим из рассмотрения эту игру. Тогда получается, что команда $B$ выиграла на одну игру больше, чем команда $A$. Команда $A$ выиграла $m - 1$ игру у всех команд, исключая $B$. Команда $B$, встречаясь с теми же командами, выходила победителем $m$ раз. Значит, среди команд, у которых выиграла команда $B$, должна найтись такая, которая не проиграла команде $A$, т. е. выиграла у команды $A$ (поскольку ничьих в волейболе не бывает). Назовем эту команду $C$. Таким образом, нашлась тройка команд $A$, $B$ и $C$, такая, что $A$ выиграла у $B$, $B$ выиграла у $C$, а $C$ выиграла у $A$.

**81.** Замечаем, что поскольку число $x$ должно быть целым, то дробь $\dfrac{1}{y - \dfrac{1}{z}}$, содержащаяся в левой части уравнения, должна равняться частному от деления целого числа на 7. Точнее сказать, даже частному от деления натурального числа на 7, поскольку дробь эта не может равняться нулю. Следовательно, должно быть $y - \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{k}$, где $k$ — некоторое натуральное число. При этом нас интересуют только такие значения $k$, при которых $y$ и $z$ принимают целые значения. Это возможно только в следующих случаях:

1) $k = 2$, тогда $\dfrac{7}{2} = 3 + \dfrac{1}{2} = 4 - \dfrac{1}{2}$, $y = 3$, $z = -2$ и $y = 4$, $z = 2$;

2) $k = 3$, тогда $\dfrac{7}{3} = 2 + \dfrac{1}{3}$, $y = 2$, $z = -3$;

3) $k = 4$, тогда $\dfrac{7}{4} = 2 - \dfrac{1}{4}$, $y = 2$, $z = 4$;

4) $k = 6$, тогда $\dfrac{7}{6} = 1 + \dfrac{1}{6}$, $y = 1$, $z = -6$;

5) $k = 8$, тогда $\dfrac{7}{8} = 1 - \dfrac{1}{8}$, $y = 1$, $z = 8$.

По условию задачи целыми должны быть не только корни $y$ и $z$, но и корень $x$. Подстановкой значений пар корней в данное уравнение

убеждаемся, что целый корень, а именно $x = 1$, получается только в случае 1. Итак, у данного уравнения возможны только две тройки целочисленных корней:

$$x = 1,\ y = 3,\ z = -2 \text{ и } x = 1,\ y = 4,\ z = 2.$$

**82.** Из первого уравнения системы замечаем, что число $[x]$ нечетное. Оно не может быть равно 1, потому что в противном случае из первого уравнения получаем, что $[y]$ равно 7, и из второго уравнения получаем для $[x]$ отрицательное значение, что противоречит допущению о том, что оно равно 1. Если предположить, что $[x] = 5$, то согласно первому уравнению значение числа $[y]$ получается отрицательным, а согласно второму — положительным. Вновь получили противоречие. Не ведет к противоречию только допущение, что $[x] = 3$. Тогда из первого уравнения системы получаем, что $[y] = 2$. При подстановке этих значений в левую часть второго уравнения получаем в его правой части число 17.

Если теперь принять, что $x = [x] + u$ и $y = [y] + v$, где $0 \leqslant u < 1$ и $0 \leqslant v < 1$, то должно быть $3u + 4v = 4$ (*). Выбирая в этих пределах любое значение $u$, находим соответствующее значение $v$ из уравнения (*).

Например, пусть $u = 0{,}4$. Тогда $v = \frac{1}{4}(4 - 3 \cdot 0{,}4) = 0{,}7$. Значит, для этого случая $x = 3{,}4$ и $y = 2{,}7$.

**83.** Рассмотрим выражение $x(x - 1) + 1$, где $x$ — натуральное число. Его значение — нечетное число, потому что $x(x - 1)$ — число четное.

Запишем заведомо противоречивое равенство

$$x(x - 1) + 1 = 2n \text{ (*)}.$$

Решим полученное квадратное уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ относительно $x$.

Получим $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8n - 3}}{2}$.

Если теперь допустить, что $8n - 3$ является при каком-то значении $n$ квадратом целого числа, то получим, что при этом значении $n$ равенство (*) справедливо. А оно, как нам известно, неверно при всех значениях $n$. Следовательно, $8n - 3$ не может являться квадратом целого числа.

**84.** Замечаем, что $2^{10} = 1024$. Следовательно, $2^{10} > 10^3$. Возводя обе части неравенства в десятую степень, находим, что $2^{100} > 10^{30}$. У числа $10^{30}$ тридцать одна цифра (у числа 10 две цифры, у числа $100 = 10^2$ три цифры и т. д.). Поэтому у числа $2^{10}$ цифр не меньше. Но может быть больше?

Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется оценить число $2^{10}$ сверху. Вновь обратимся к равенству $2^{10} = 1024$. Возводя обе части этого равенства в квадрат и округляя правую часть, получаем неравенство $2^{20} < 1{,}05 \cdot 10^6$. Аналогичным образом находим, что $2^{40} <$

$< 1{,}11 \cdot 10^{12}$ и $2^{50} < 1{,}2 \cdot 10^{15}$ и $2^{100} < 1{,}44 \cdot 10^{30}$. У числа в правой части последнего неравенства тоже 31 цифра. Значит, у числа $2^{100}$ тоже 31 цифра. Более того, число цифр рассматриваемого нами числа $2^{100}$ не увеличится, если мы его умножим на 2 и на 4. Значит, у чисел $20^{100}$, $2^{101}$ и $2^{102}$ одинаковое число цифр — тридцать одна.

**85.** Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, придется прибегнуть к счету: будем последовательно находить три последние цифры степеней числа 7. Это довольно легко. Каждый ряд задача сводится к умножению трехзначного числа на число 7.

Теперь заметим, что $7^{9999} = 7^{499 \cdot 20 + 19}$. Значит, три последние цифры у степени $7^{499 \cdot 20 + 19}$ такие же, как и у степени $7^{19}$. Но степень $7^{19}$ оканчивается цифрами 143, значит, и три последние цифры числа $7^{9999}$ также 143.

Всеволод Николаевич Березин
Лариса Юрьевна Березина
Инна Львовна Никольская

**СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ И ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Зав. редакцией Р. А. Хабиб
Редактор Л. М. Котова
Младшие редакторы Л. И. Заседателева, Л. Е. Козырева, Е. А. Сафронова
Художник Б. Л. Николаев
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор Г. В. Субочева
Корректор Г. В. Хрусталева

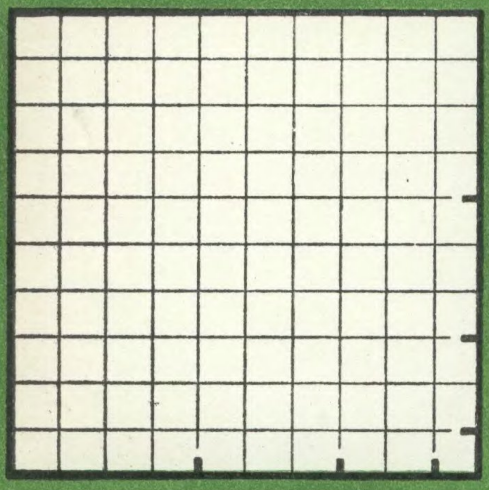
ИБ № 8781

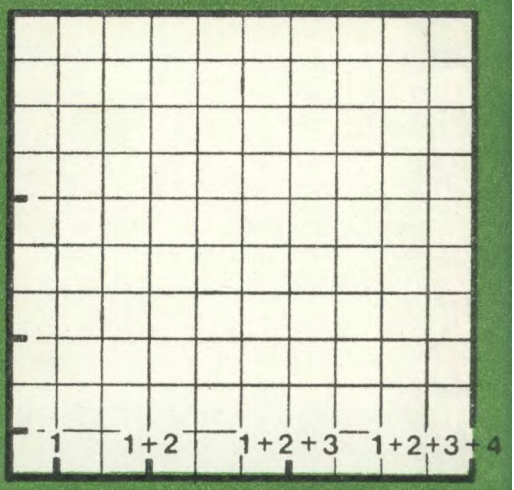
Сдано в набор 06.06.85. Подписано к печати 21.10.85. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 3. Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 11,0+форз. 0,25. Усл. кр.-отт. 11,69. Уч.-изд. л. 11,14+форз. 0,45. Тираж 190 000 экз. Заказ № 1212. Цена 50 коп.

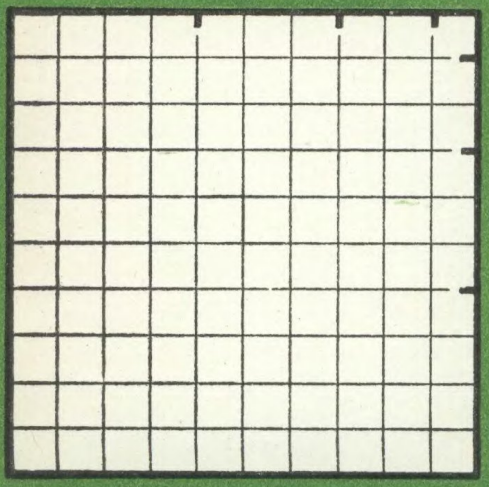
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

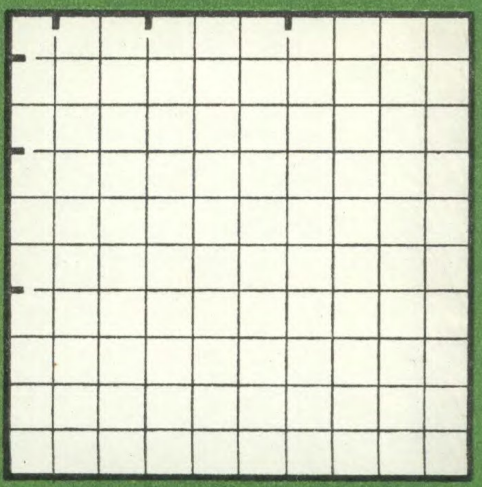
Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Саратов, ул. Чернышевского, 59, в областной ордена «Знак Почета» типографии им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли, 214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

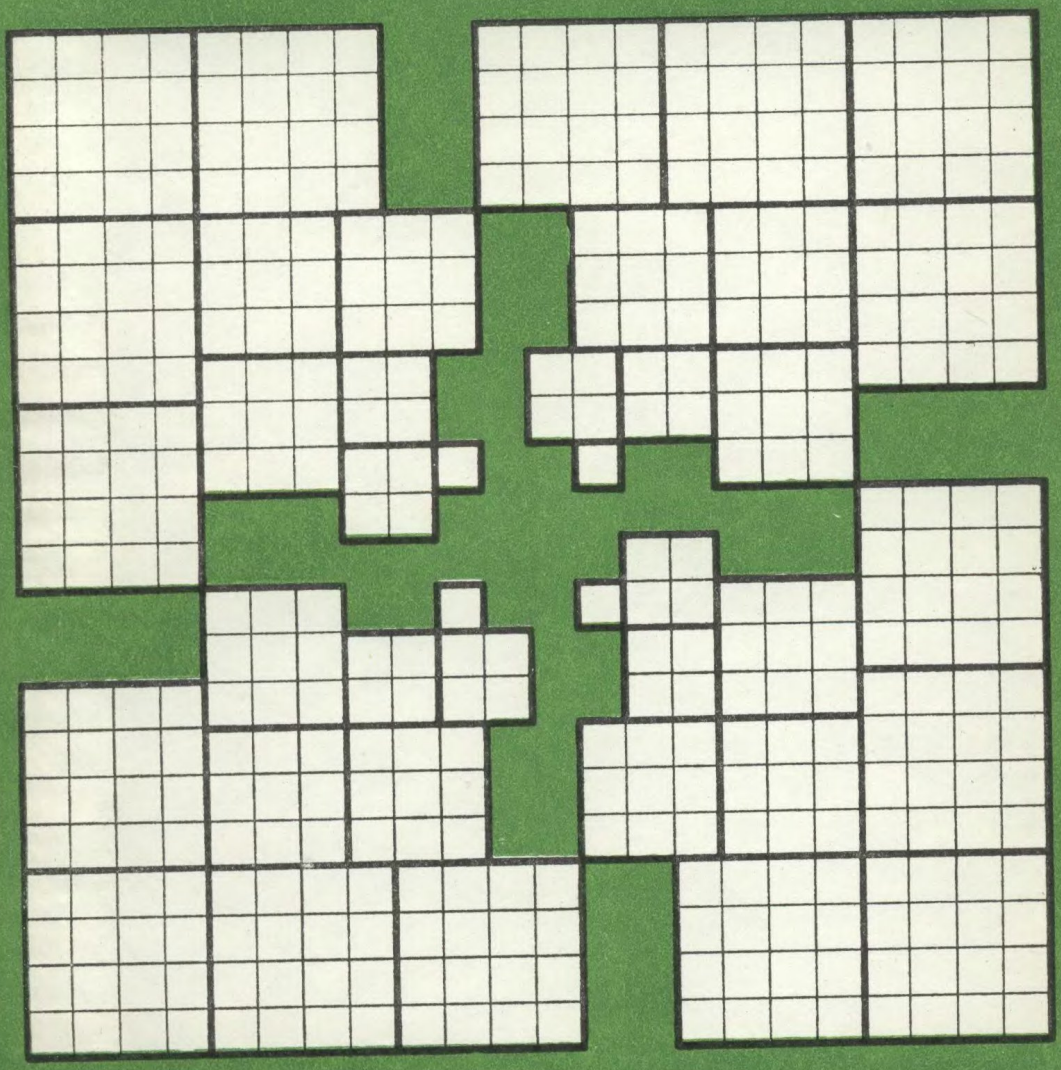






$$4(1+2+3+\ldots+n)^2$$



$$4(1\cdot 1^2+2\cdot 2^2+3\cdot 3^2+\ldots+n\cdot n^2)=$$
$$=4(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$$